11月7日

Ｈ１１奈良A

１．次の各問に答えよ。

（１）不定積分$\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$を求めよ。

（２）関数$y=x^2\cdot 2^x$を微分せよ．

（３）２つの行列の積で表された行列$A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$について，$A$及び$A^7$を求めよ．

（４）空間内の平面π： $2x-3y+z=7$と点$(-1,3,4)$の距離を求めよ。

２．行列$N=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$について，次の各問に答えよ。

（１）Nの個有値を求めよ。

（２）関係式$HN=NH$を満たす実行列$H=\begin{pmatrix}a & b & c\\b & d & e\\c & e & f\end{pmatrix}$をすべて求めよ。

ただし，成分a,b,c,d,e,fは実数である。

３．平面上の領域D:$x^2+(y-1)^2\le 4$, $y\ge 0$について，次の各問に答えよ。

（１）領域Dを図示し，その面積を求めよ。

（２）領域Dをx軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

４．次の各問に答えよ。

（１）範囲$x>0$において，不等式$\sin x<x$がなりたつことを示せ。

（２）無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$が発散することを示せ。

H11 奈良 A

1. (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x+1}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a>0)}$$

(2) $y = x^2 \cdot 2^x$

$= x^2 e^{x\log 2}$ $\quad (\because\ z = 2^x \quad \log z = x\log 2 \quad \therefore z = e^{x\log 2})$

$\therefore y' = (x^2)' e^{x\log 2} + x^2 (e^{x\log 2})'$

$= 2x e^{x\log 2} + x^2 (\log 2) e^{x\log 2}$

$= 2x \cdot 2^x + x^2 (\log 2) 2^x = 2^x (2x + (\log 2) x^2)$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 5A$

$A^3 = A^2 \times A = 5A \times A = 5A^2 = 5 \cdot 5A = 5^2 A$

$A^4 = 5^3 A$, $A^5 = 5^4 A$, $A^6 = 5^5 A$

$\therefore A^7 = 5^6 A$

参：点と平面の距離

点 $P(x_0, y_0, z_0)$ から平面 π : $ax + by + cz + d = 0$ に下ろし

た垂線の長さ l（Pとπの距離）

$$l=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(4)、P(-1,3,4)とπ：$2x-3y+z-7=0$との距離l

$$l=\frac{|2(-1)-3\cdot3+4\cdot-7|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}}=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

2、$N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

(1) $|tE-N|=0$：Nの固有方程式

$$0=\begin{vmatrix}t&-1&0\\0&t&-1\\0&0&t\end{vmatrix}=t^3 \qquad \therefore t=0\ ;\ \text{Nの固有値}$$

(2) $H=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}$ $\quad HN=NH \Rightarrow H(?)$

$$HN=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&d\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$NH=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&d&0\\0&0&f\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$HN=NH$より $b=c=0,\ c=e=0,\ a=d=f$

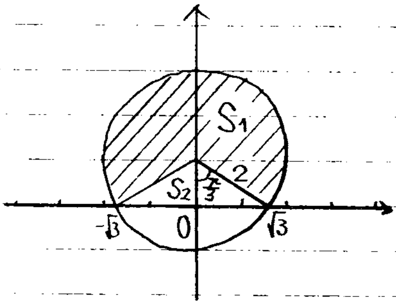
$$H=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=aE$$

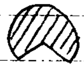
逆に $H=aE$ ならば

$$HN=N(aE)=aNE=aN=aEN=HN$$

3. $D: x^2+(y-1)^2 \leqq 4=2^2 \quad 0 \leqq y$

(1)

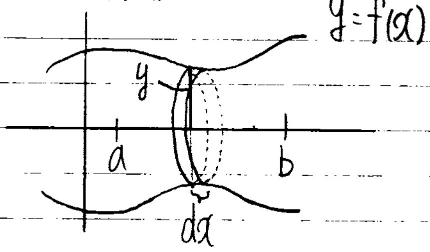


$S_1=$  $=\pi\times 2^2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}\pi$

$S_2=2\times\frac{1}{2}\times 1\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$S=S_1+S_2=\frac{8}{3}\pi+\sqrt{3}$

回転体の体積



dv: 微小円板の体積

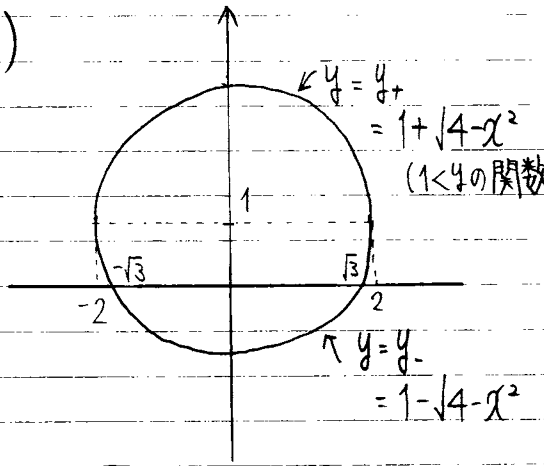
$dv=\pi y^2 dx$

$$V=\int_a^b dv$$

$$=\pi\int_a^b y^2 dx$$

: 回転体の体積

(2)

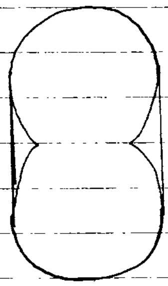


$x^2+(y-1)^2=4$

$(y-1)^2=4-x^2$

$y-1=\pm\sqrt{4-x^2}$

$y: 1\pm\sqrt{4-x^2}$



$$V=\pi\int_{-2}^{2}y_+^2\,dx-\left\{\pi\int_{-2}^{-\sqrt{3}}y_-^2\,dx+\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}y_-^2\,dx\right\}$$

$$\underbrace{\pi\int_{-2}^{2}y_+^2\,dx}_{=\,2\pi\int_0^2 y_+^2\,dx}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^2 y_+^2\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{2}y_-^2\,dx\right\}$$

つぎ $\int_0^2 y_+^2\,dx$

$$=\int_0^2\{1+\sqrt{4-x^2}\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos t)^2\,2\cos t\,dt$$

$$\left[\begin{array}{ll} x=2\sin t & \\ dx=2\cos t\,dt & \begin{array}{c|c} x & 0\sim 2 \\ \hline t & 0\sim\frac{\pi}{2}\end{array}\end{array}\right]$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+4\underbrace{\cos^2 t}_{=\frac{1}{2}(\cos 2t+1)}+4\underbrace{\cos^3 t}_{=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t})dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\\ \cos 2t=2\cos^2 t-1\end{array}}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{2+4\cos t+2\cos 2t+\cos 3t\}dt$$

$$=2\left\{\underbrace{2[t]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\pi}+4\underbrace{[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=1}+\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\underbrace{[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+\frac{1}{3}\underbrace{[\sin 3t]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=-1}\right\}$$

No. 5 Date 11・14・後

$$= 2\left(\pi + 4 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{3\pi + 11}{3}$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} y_-^2 \, dx$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{2} \{1 - \sqrt{4 - x^2}\}^2 dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos t)^2 2\cos t \, dt$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & \sqrt{3} \sim 2 \\ \hline t & \frac{\pi}{3} \sim \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - 4\cos^2 t + 4\cos^3 t) dt$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \{\cos t - 4 \times \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) + 4 \times \frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)\} dt$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 + 4\cos t - 2\cos 2t + \cos 3t)\} dt$$

$$= 2\left\{-2[t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + 4[\sin t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{2}[\sin 2t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}[\sin 3t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$= 2\left\{-2 \cdot \frac{\pi}{6} + 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}(-1 - 0)\right\}$$

$$= 2\left\{-\frac{\pi}{3} + 4 - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}(-2\pi + 24 - 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2)$$

$$= \frac{1}{3}(22 - 2\pi - 9\sqrt{3})$$

4. (1) $0<x \Rightarrow \sin x<x$

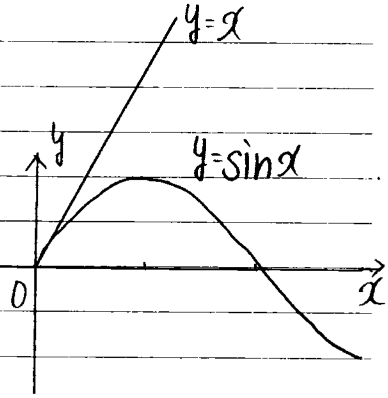
∵) $f(x)=x-\sin x$ とおく　$f(0)=0$

$f'(x)=1-\cos x \geq 0$

$f(x)$：単調増加

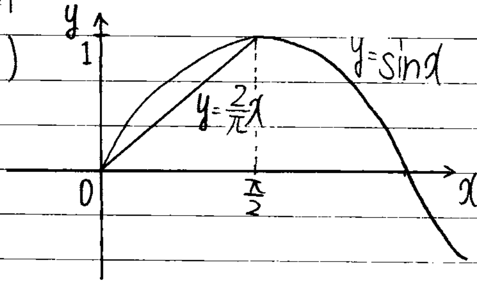
∴ $f(x)>0 \quad (x>0)$

∴ $\sin x<x \quad (0<x)$



(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$：発散

∵)



$0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2}{\pi}x<\sin x$

$0<\frac{1}{n}<\frac{\pi}{2} \quad (n=1,2,\cdots)$

∴ $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}<\sin\frac{1}{n}$

∴ $\frac{2}{\pi}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\infty}<\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

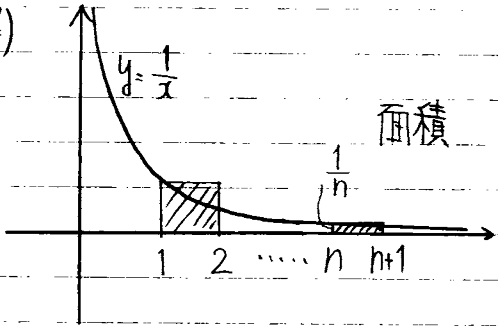
$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4コ}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{16}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}}_{8コ}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$

$=1+\frac{1}{2}\times\infty=\infty$

No. 7 Date 11・14・後

別解)



$$\log(n+1)=[\log x]_1^{n+1}=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}$$

$\log(n+1) \xrightarrow{(n\to\infty)} \infty$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \xrightarrow{(n\to\infty)} \infty$