Ｈ１１名古屋

１．２次元にある物体Pが，運動していて，その位置ベクトルを

$$\mathbf{r}=\{A+B\cos(\omega t)\}\mathbf{e}_x+B\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$$ ただし，$\mathbf{e}_x$，$\mathbf{e}_y$は単位ベクトルとする．

（１）Pの軌跡を求めよ．

（２）$\mathbf{r}$の加速度$\ddot{\mathbf{r}}$と速度$\dot{\mathbf{r}}$の大きさをそれぞれ$|\ddot{\mathbf{r}}|$，$|\dot{\mathbf{r}}|$を求めよ．

（３）$\dot{\mathbf{r}}$と$\ddot{\mathbf{r}}$の内積を求めよ．

２．次の微分方程式の一般解を求めよ．

（１）$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y(x)=0$

（２）$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y(x)=\sin 2x$

（３）$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y(x)=\cos x$

３．$A=\begin{pmatrix}3&1&3\\1&5&1\\3&1&3\end{pmatrix}$ この行列の正規化した固有ベクトルを求め，互いに直交することを示せ．

４．A工場は$0<p<1$の確率，B工場は$0<q<1$の確率で不良品を生産する．
いま，A工場の製品から４００個，B工場の製品から１００個の製品を取り出して混ぜ合わせた中から１つ製品を取り出す．

（１）不良品である確率を求めよ．

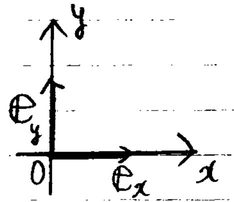
（２）取り出した不良品がA工場で作られたものである確率を求めよ．

No. 1 Date 4.10 後

H11 名古屋

1. (i) $\mathbb{r} = \{A + B\cos(\omega t)\}\mathbb{e}_x + B\sin(\omega t)\mathbb{e}_y$

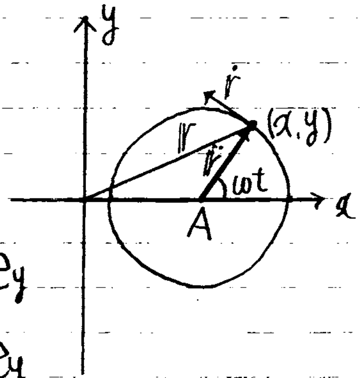
$\quad \parallel$
(x, y)



$$x = A + B\cos(\omega t)$$

$$y = B\sin(\omega t)$$

$$\therefore (x-A)^2 + y^2 = B^2$$



(ii) $\dot{\mathbb{r}} = -B\omega\sin(\omega t)\mathbb{e}_x + B\omega\cos(\omega t)\mathbb{e}_y$

$\ddot{\mathbb{r}} = -B\omega^2\cos(\omega t)\mathbb{e}_x - B\omega^2\sin(\omega t)\mathbb{e}_y$

$|\dot{\mathbb{r}}| = \sqrt{(-B\omega\sin(\omega t))^2 + (B\omega\cos(\omega t))^2} = \sqrt{(B\omega)^2}\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = |B\omega|$

$|\ddot{\mathbb{r}}| = |B\omega^2| = |B|\omega^2$

(iii) $\dot{\mathbb{r}} \cdot \ddot{\mathbb{r}} = (-B\omega\sin(\omega t))(-B\omega^2\cos(\omega t)) + (B\omega\cos(\omega t))(-B\omega^2\sin(\omega t)) = 0$

2. $x = t$ として

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) = \sin 2t$ (3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) = \cos t$

解) $Y = \mathcal{L}[y]$ とおいて

$\mathcal{L}[(1)]$ より

$$s^2Y - \underbrace{y(0)}_{=a}s - \underbrace{y'(0)}_{=b} + Y = 0$$

a, b とおく

$$(s^2+1)Y = as + b$$

$$Y = a\frac{s}{s^2+1} + b\frac{1}{s^2+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = a\cos t + b\sin t$$

$\mathcal{L}[(2)]$より

$$s^2Y - \underset{\substack{\| \\ a}}{y(0)}s - \underset{\substack{\| \\ b}}{y'(0)} + Y = \frac{2}{s^2+4}$$

とおく

$$(s^2+1)Y = \frac{2}{(s^2+4)} + as + b$$

$$Y = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} + a\frac{s}{s^2+1} + b\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right) + a\frac{s}{s^2+1} + b\frac{1}{s^2+1}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{2}{s^2+4} + \underset{\substack{\| \\ A}}{a}\frac{s}{s^2+1} + \underset{\substack{\| \\ B}}{\left(b+\frac{2}{3}\right)}\frac{1}{s^2+1}$$

とおく

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y = -\frac{1}{3}\sin 2t + A\cos t + B\sin t$$

(*) $\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = R(t)$ ：定数係数線形微分方程式

(☆) $\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = 0$ ：(*)に随伴(同伴)する同次方程式

(☆)は一次独立なn個の解を持つ

$$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$$

とすると (☆)の一般解 y は $y=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$

(*)の解を1つ y_0 を(*)の特殊解とする

(*)の一般解 = (*)の特殊解 + (☆)の一般解

(☆)に $y=e^{\xi t}$, $\frac{d^k y}{dt^k}=\xi^k e^{t}$ を代入すると

$$\underbrace{(\xi^n+a_{n-1}\xi^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\xi+a_0)}_{f^n(\xi)\text{とおく}}\underset{0}{\underset{\#}{e^{\xi t}}}=0$$

$f(\xi)$: (☆)の特性多項式

$f(\xi)=(\xi-\alpha_1)^{n_1}\cdots\cdots(\xi-\alpha_r)^{n_r}$ $(n_1+\cdots+n_r=n)$

(☆)の一次独立な解

$t^{j_k}e^{\alpha_k}$ $(0\leqq j_k\leqq n_k-1$, $k=1,\cdots,r)$

(☆)の一般解は

$$y=(a_{1,0}+a_{1,1}t+\cdots\cdots+a_{1,n_1-1}t^{n_1-1})e^{\alpha_1 t}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(a_{r,0}+a_{r,1}t+\cdots\cdots+a_{r,n_r-1}t^{n_r-1})t^{\alpha_r}$$

$\mathcal{L}[(3)]$より

$$s^2Y-\underset{a}{\underset{\|}{y(0)}}s-\underset{b}{\underset{\|}{y'(0)}}+Y=\frac{s}{s^2+1}$$

とおく

$$(s^2+1)Y=\frac{s}{s^2+1}+as+b$$

$$Y = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)} + a\frac{s}{s^2+1} + b\frac{1}{s^2+1}$$

$\mathcal{L}[f*g](s)$

$= \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$

いま $F(s)$, $G(s)$ に対し

$$f = \mathcal{L}^{-1}[F], \quad g = \mathcal{L}^{-1}[G]$$

とおくと

$$\mathcal{L}[f] = F \quad , \mathcal{L}[g] = G$$

$$\mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] = FG$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f*g = \mathcal{L}^{-1}[F]*\mathcal{L}^{-1}[G]$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]\right)(t) + a\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + b\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= ((\sin t)*(\cos t))(t) + a\cos t + b\sin t$$

$$= \frac{1}{2}t\sin t + a\cos t + b\sin t$$

$$\because)\ ((\sin t)*(\cos t))(t) = \int_0^t \sin\tau\cos(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\sin(\tau+(t-\tau)) + \sin(\tau-(t-\tau))\}d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\sin t + \sin(2\tau-t)\}d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[\tau]_0^t\sin t - \frac{1}{2}[\cos(2\tau-t)]_0^t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ t\sin t - \frac{1}{2}\underbrace{(\cos t - \overbrace{\cos(-t)}^{\cos t})}_{=0} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} t \sin t$$

> 畳み込み $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
>
> $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 対称行列

$A\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \neq \mathbb{0})$

$= tE\boldsymbol{v}$

(*) $(tE - A)\boldsymbol{v} = \mathbb{0}$

$(tE-A)$; 正則行列とすると $(tE-A)^{-1}$ を左から掛けて

$\boldsymbol{v} = \mathbb{0}$ 困る ∴ $(tE-A)$; 正則でない

∴ $|tE-A| = 0$; t に関する方程式 (固有方程式)

$$0 = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -3 \\ -1 & t-5 & -1 \\ -3 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)^2(t-5) - 3 - 5 - 9(t-5) - (t-3) - (t-3)$$

$$= (t^2-6t+9)(t-5) - 6 - 9t + 45 - 2t + 6$$

$$= t^3 - 11t^2 + 39t - 45 - 9t + 45 - 2t$$

$= t^3 - 11t^2 + 28t = t(t^2 - 11t + 28)$

$= t(t-4)(t-7)$

$\therefore t = 0, 4, 7$: Aの固有値

$t=0$ のとき (*)より

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -1 & -5 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 0 & \text{—①} \\ x + 5y + z = 0 & \text{—②} \end{cases}$$

①$-3\times$②より $-14y = 0$ $\therefore y = 0$

$x + y = 0$

$$\therefore v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

xを調整して長さ1にする(正規化)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$t=4$ のとき(*)より

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

No. 7 Date 4・10・後

$$\begin{cases} x-y-3z=0 & \text{①} \\ x+y+z=0 & \text{②} \\ -3x-y+z=0 & \text{③} \end{cases}$$

①+②より　$2x-2z=0$　$\therefore z=x$

①より　$x-y-3x=0$　$\therefore y=-2x$

$$v=\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t=7$のとき

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} 4x-y-3z=0 & \text{①} \\ -x+2y-z=0 & \text{②} \\ -3x-y+4z=0 & \text{③} \end{cases}$$

①-③より　$7x-7z=0$　$\therefore z=x$

①より　$y=x$

$$\therefore v=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_1\cdot u_2=0,\ u_1\cdot u_3=0,\ u_2\cdot u_3=0$

以上より

$$u_i\cdot u_j=\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

一般に対称行列の固有値は実数で互いに違う固有値に属する固有ベルトルは直交する。

4. C：不良品であるという事象

A：A工場の製品であるという事象

B：B 〃

(1) $P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$

$$= \frac{4}{5}p + \frac{1}{5}q$$

$$= \frac{4p+q}{5}$$

(2) $$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C|A)}{\frac{4p+q}{5}} = \frac{\frac{4p}{5}}{\frac{4p+q}{5}} = \frac{4p}{4p+q}$$

ベイズの定理