11月21日

Ｈ１１長岡

1．２人でジャンケンをする．以下のいに答えよ．

（１）１回で勝負の決まる確率を求めよ．

（２）３回以内で勝負の決まる確率を求めよ．

（３）n回以内で勝負の決まる確率を求めよ．

2．以下の問いに答えよ．

（１）点$P(x,y)$からx軸上に下ろした垂線の足（Pがx軸上にあるときはP自身）を$P'(x',y')$とする．PをP'にうつす一次変換を$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と表すとき，行列$A$を求めよ．

（２）点$P(x,y)$から直線$y=kx$（kは定数）に下ろした垂線の足（Pがこの直線上にあるときはP自身）を$P'(x',y')$とする．PをP'にうつす一次変換を$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と表すとき，行列$B$を求めよ．

3．関数$f(x)=2|x|+x$について以下の問いに答えよ．

（１）$y=f(x)$のグラフをかけ．

（２）$F(t)=\int_t^{t+1} f(x)dx$とおく．tがすべての実数の範囲を動くとき$F(t)$の最小値を求めよ．

4．球面$x^2+y^2+z^2=1$の$y>0$，$z>0$の部分をMとし，$A(1,0,0)$，$B(-1,0,0)$とする．M上の点$P(x,y,z)$からxy平面に下ろした垂線の足をQとするとき，以下の問いに答えよ．

（１）三角形ABQの面積Sをx,yで表せ．

（２）三角すい$PABQ$の体積Vをx,yで表せ．

（３）PがM上を動くとき，Vの最大値を求めよ．

5．微分方程式$\dfrac{d^2y}{dx^2}+ay=0$について以下の問いに答えよ．

（１）$a=-2$のとき一般解を求めよ．

（２）$a=2$のとき一般解を求めよ．

（３）条件$y(0)=y(\pi)=0$を満たす解で，定数関数ではないものが存在するような定数aをすべて求めよ．

No. 1 Date 11·28·後

H11 長岡

1. G：グー　C：チョキ　P：パー

(1)

b＼a	G	C	P
G			
C			
P			

P(1回で勝負)

$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

A_k：k回目でどちらか勝負

B_k：k回目で決定 $(k-1)$回目まで引分け

すると　$B_k = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots\cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$

(2)　$P(\underbrace{B_1 \cup B_2 \cup B_3}_{\text{互いに排反}}) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$

ここで $P(B_k) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots\cdots P(A_k)$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{2}{3}$

$\boxed{1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \ (r \neq 1)}$

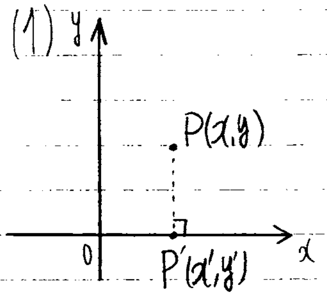
$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\frac{1}{3}}$

$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27}$

(3) (2)と同様に $p = \frac{2}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2. (1)

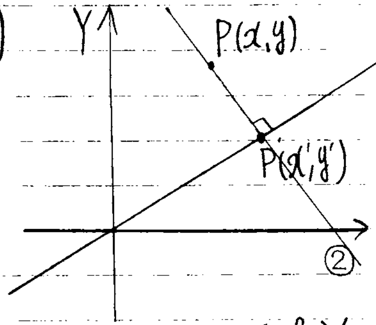


$x'=x$

$y'=0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x+0\cdot y \\ 0x+0\cdot y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2)



$kX-Y=0$ ―①

①と直交して $P(x,y)$ を通る直線

$(X-x)+k(Y-y)=0$ ―②

$$\therefore \begin{cases} kX-Y=0 & \text{―①} \\ X+kY=x+ky & \text{―②} \end{cases}$$

クラーメルの公式

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \quad x=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$x'=X=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ x+ky & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix}}=\frac{x+ky}{k^2+1}, \quad y'=Y=\frac{\begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & x+ky \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix}}=\frac{kx+k^2y}{k^2+1}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+ky}{k^2+1} \\ \dfrac{kx+k^2y}{k^2+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1\cdot x+ky \\ kx+k^2y \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

No. 3 Date 11・28・後

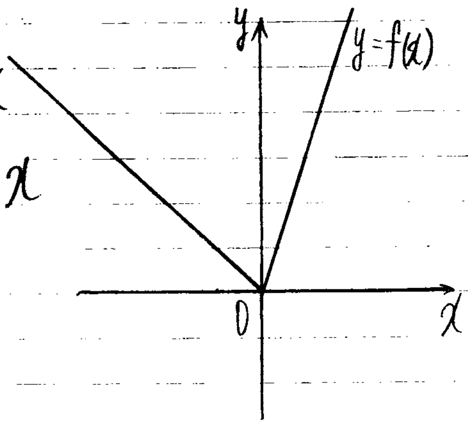
$$\therefore B = \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{pmatrix}$$

3. (1) $f(x) = 2|x| + x$

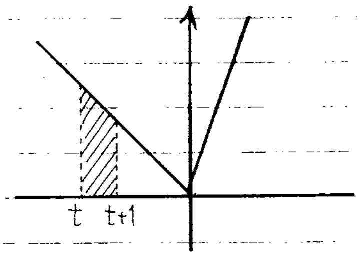
$0 \leqq x$ のとき $f(x) = 2x + x = 3x$

$x < 0$ のとき $f(x) = -2x + x = -x$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leqq x) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$



(2) $F(t) = \int_t^{t+1} f(x)\,dx$



$t+1 < 0$ のとき

$f(x) = -x \quad (t \leqq x \leqq t+1)$

$$\therefore F(t) = \int_t^{t+1} (-x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[x^2\right]_t^{t+1} = -\frac{1}{2}\left\{(t+1)^2 - t^2\right\} = -\frac{1}{2}(2t+1)$$

$$= -t - \frac{1}{2}$$

$-1 < t < 0$

$$F(t) = \int_t^{t+1} f(x)\,dx$$

$$= \int_t^0 f(x)\,dx + \int_0^{t+1} f(x)\,dx = \int_t^0 (-x)\,dx + \int_0^{t+1} 3x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2\right]_t^0 + \frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^{t+1}$$

$$= -\frac{1}{2}(0 - t^2) + \frac{3}{2}(t+1)^2 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2} = 2t^2 + 3t + \frac{3}{2}$$

Date 11.28.後 No. 4

$0 \leqq t$

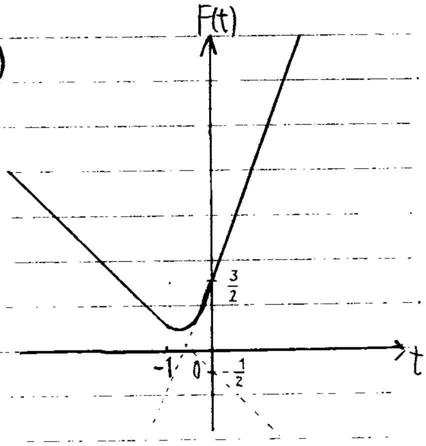
$$F(t) = \int_t^{t+1} f(x)\,dx$$

$$= 3\int_t^{t+1} x\,dx = \frac{3}{2}\left[x^2\right]_t^{t+1} = \frac{3}{2}\left\{(t+1)^2 - t^2\right\}$$

$$= \frac{3}{2}(2t+1) = 3t + \frac{3}{2}$$

以上より

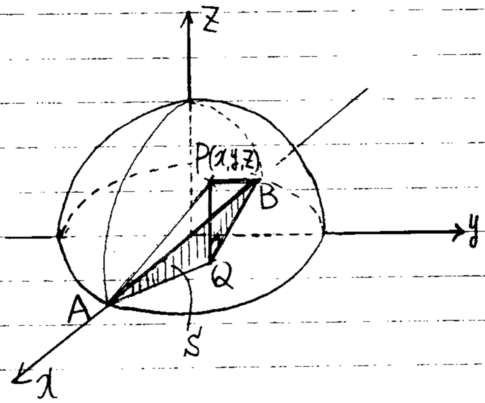
$$F(t) = \begin{cases} -t - \frac{1}{2} & (t < -1) \\ 2t^2 + 3t + \frac{3}{2} & (-1 \leqq t \leqq 0) \\ 3t + \frac{3}{2} & (0 \leqq t) \end{cases}$$



$$F'(t) = \begin{cases} -1 & (t < -1) \\ 4t + 3 & (-1 \leqq t \leqq 0) \\ 3 & (0 \leqq t) \end{cases}$$

$$F'(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{4} \qquad \min F = F\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y > 0$, $z > 0$



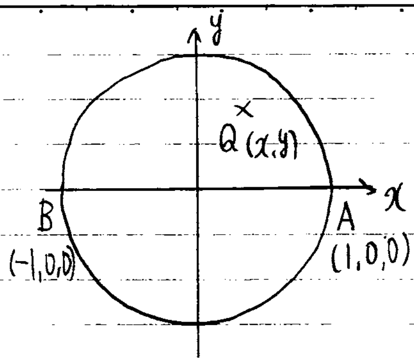
(1) $S = \frac{1}{2} \times$ 底辺 $\times$ 高さ

$$= \frac{1}{2} AB \times y$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \times y = y$$

(2) $V = \frac{1}{3} \times \underbrace{S}_{\triangle ABQ} \times \underbrace{\text{高さ}}_{z = \sqrt{1-x^2-y^2}}$

$= \frac{1}{3} y \sqrt{1-x^2-y^2}$



(3) $f(x,y) = \frac{1}{3} y \sqrt{1-x^2-y^2}$

$D = \{(x,y) ;\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y\}$

$f_x = y \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -yx(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$f_y = \sqrt{1-x^2-y^2} + y\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1-x^2-y^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1-x^2-2y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$f_{xx} = -y\left\{(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)\right\}$

$= \frac{-y(1-x^2-y^2+x^2)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$f_{xy} = \frac{-x(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f_{yy} = \frac{-3y(1-x^2-2y^2)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$f_x = 0 \Rightarrow x = 0$ or $y = 0$, $f_y = 0 \Rightarrow 1-x^2-2y^2 = 0$

$x=0$ のとき $y^2 = \frac{1}{2}$, $(x,y) = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$y=0$ のとき $x^2 = 1$, $(x,y) = (\pm 1, 0)$ …不適

$0<y$ より 結局 $(x,y) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: 極値点の候補

$(x, y) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$のとき

$$\Delta^{(1)} = f_{xx} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}} < 0$$

そして

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

極大…時に最大　$\therefore V_{max} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-0-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{6}$

5. (*) $\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0$

(1) $a = -2$のとき

(*) $y'' - 2y = 0$

特性方程式は $t^2 - 2 = 0$ で $t = \pm\sqrt{2}$

一般解は $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$

一般に

(*) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a y' + a_0 y = 0$

で $y = e^{tx}$ という解を予想して(*)の左辺に代入すると

$$\underbrace{(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 t + a_0)}_{= 0} e^{tx}$$

↖特性方程式

(2) $a=2$ のとき (*) $y''+2y=0$

特性方程式 $t^2+2=0$ で 解は $t=\pm\sqrt{2}i$

$y=C_1e^{\sqrt{2}ix}+C_2e^{-\sqrt{2}ix}$

$=C_1(\cos\sqrt{2}x+i\sin\sqrt{2}x)+C_2(\cos\sqrt{2}x-i\sin\sqrt{2}x)$

$=\underbrace{(C_1+C_2)}_{A}\cos\sqrt{2}x+\underbrace{i(C_1-C_2)}_{B}\sin\sqrt{2}x$

$=A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x$

(3) a:実定数 (*) $y''+ay=0$, $y(\pi)=y(0)=0$, $y\neq0$ を持つ aを求めよ

$a=0$ のとき $y''=0$ $y=C_0+C_1x$

$y(0)=0$ より $C_0=0$ $\therefore y=C_1x$

$y(\pi)=0$ より $C_1=0$ $\therefore y=0$ これは不適

$a<0$ のとき $a=-\lambda^2$とかける $(\lambda>0)$ (*) $y''-\lambda^2y=0$

特性方程式 $t^2-\lambda^2=0$ の解は $t=\pm\lambda$

$\therefore y=C_0e^{\lambda x}+C_1e^{-\lambda x}$

$y(0)=0$ より $C_0+C_1=0$

$y(\pi)=0$ より $C_0e^{\pi\lambda}+C_1e^{-\pi\lambda}=0$

クラーメルの公式より

$$C_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^{-\pi\alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\pi\alpha} & e^{-\pi\alpha} \end{vmatrix}} = \frac{0}{e^{-\pi\alpha} - e^{\pi\alpha}} = 0$$

$e^{-\pi\alpha} - e^{\pi\alpha} \neq 0$ に注

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{\pi\alpha} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\pi\alpha} & e^{-\pi\alpha} \end{vmatrix}} = 0$$

$\therefore y = 0$ …不適

以上よりあるとすれば $a > 0$

$a = \omega^2 \quad (\omega > 0)$

(*) $y'' + \omega^2 y = 0$

特性方程式 $t^2 + \omega^2 = 0$ の解は

$t = \pm \omega i$

(2)と同様にして(*)の一般解は $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ となる

$y(0) = 0$ より $A = 0$ $\quad \therefore y = B\sin\omega x$

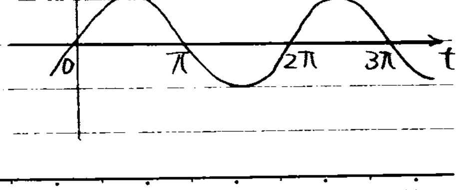
ここで $B = 0$ とすると $y = 0$ となり不適

$\therefore B \neq 0$ $\quad y(\pi) = 0$ より $\quad B\sin\omega\pi = 0$

$\therefore \sin\omega\pi = 0$

$\therefore \omega\pi = n\pi$ (n: 整数)

$\omega = n$



$\therefore a = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$