H１１京都

1．西暦は昭和年号で割り切れるとき，その昭和年号をすべて書け．
例．昭和２５年＝１９５０年

2．的に向かって三本の矢をうつ．$\dfrac{\pi}{2}$の範囲に当たる確率を求めよ．
ただし的から外れた矢は再びうち直せる．

3．次の積分方程式の一般解を求めよ．

$$(*) \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\int_a^x y(t)(x-t)dt$$

4．ある仕事$J_1 \sim J_n$がある．これをコンピュータで処理するときその処理速度は$p_i>0$，処理期限は$d_i \geq 0$のとき
①すべての仕事を終わらせるためのプロジェクトの１つに期限の早いものからやっていくことがあげられることを証明せよ．
②一定期間に最大の仕事を終わらせるプロジェクトをその実行を説明しながら計算せよ．

5．$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ について以下を説明せよ．

①x_iに実数を代入したとき，$x_i=x_j \quad (i \neq j)$ならAの階数はn以下になる．
②Aの行列式は$(x_i-x_j)(i \neq j)$で割り切れる．
③x_iに実数を代入したとき，$x_i \neq x_j$であるようなxの数がAの階数である．

H11. 京都

1. $1950-25=1925$ (S.0年)

r年：求める昭和年

$$1925+r=kr$$

$$1925=(k-1)r$$

$\therefore r=5,7,11,25,35,55,$
$77,385,1925$

$1925=5^2\times7\times11$

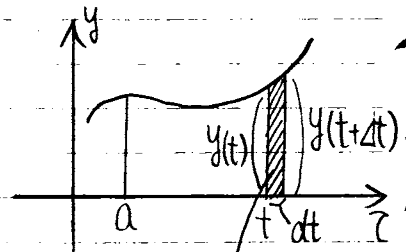
$$\begin{array}{r} 77 \\ 25\,\overline{)1925} \\ \underline{175} \\ 175 \\ \underline{175} \\ 0 \end{array}$$

$r\geqq64$ $\therefore r=5,7,11,25,35,55$ //

? 元年(1年)はどうなのか?

2. 問題 条件不足のため解けないので略

3. (＊) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\int_a^x y(t)(x-t)dt$



解) $Y(t)=\int_a^t y(\tau)d\tau$ とおく $Y'(t)=y(t)$

$Y(a)=0$

$$\frac{Y(t+\Delta t)-Y(t)}{\Delta t}\fallingdotseq y(t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_a^x Y'(t)(x-t)dt=\Big[Y(t)(x-t)\Big]_a^x-\int_a^x Y(t)\underbrace{\frac{d}{dt}(x-t)}_{=-1}dt$$

$$=\int_a^x Y(t)\,dt$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\int_a^x\left(\int_a^t y(\tau)\,d\tau\right)dt$$

両辺を 微分して

$$y^{(3)}=\int_a^x y(\tau)\,dt$$

さらに微分して

$$y^{(4)}=y(x)=y$$

$$(\ast)\quad y^{(4)}-y=0$$

特性方程式は

$$\xi^4-1=0$$

$$(\xi-1)(\xi+1)(\xi^2+1)=0$$

$$y=y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\overline{c_3\cos x+c_4\sin x}$$

特性方程式について

$y=e^{\xi x}$ という解を想定して $(\ast)$ に代入

$$\xi^4e^{\xi x}-e^{\xi x}=0$$

$$(\xi^4-1)\underbrace{e^{\xi x}}_{\neq 0}=0$$

$$\therefore \xi^4-1=0$$

$$0 = \xi^4 - 1 = (\xi-1)(\xi+1)(\xi+i)(\xi-i)$$

$$\xi = \pm 1, \pm i$$

$$\therefore\ y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \underbrace{e^{ix}}_{\cos x + i\sin x} + C_4 \underbrace{e^{-ix}}_{\cos x - i\sin x}$$

$$= \underbrace{(C_3+C_4)}_{A}\cos x + \underbrace{i(C_3-C_4)}_{B}\sin x$$

$$= A\cos x + B\sin x$$

4. 福嶋先生専門外のため略

5. rank(階数)について

$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) : n\times n$

$a_1, \cdots, a_n$ のうち一次独立なベクトルの極大系を構成するベクトルの個数をAの階数といい、rank A とかく

$r = \mathrm{rank}\,A$ とする

$\Longleftrightarrow a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots ; a_{i_r}\ (1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n)$ があって

i) 一次独立

&

ii) $a_j\ (j \neq i_1, \cdots, i_r)$ に対し, $a_j, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$:一次従属

このような個数rは一定

例、$A=(\mathbb{a}_1,\cdots,\mathbb{a}_n):n\times n$

$|A|\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\,A=n$

$\because)\ \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbb{a}_i=\mathbb{0} \Longrightarrow x_i=0\ (i=1,\cdots,n)\right]$

そこで、$\sum_i x_i\mathbb{a}_i=\mathbb{0}$ とすると

$$\underbrace{(\mathbb{a}_1\cdots\cdots\mathbb{a}_n)}_{\overset{\shortparallel}{A}}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbb{0}$$

$|A|\neq 0\quad\therefore A^{-1}$が存在

A^{-1}を左から作用

$$\underbrace{A^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}=A^{-1}\mathbb{0}=\mathbb{0}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\ x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\ x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{pmatrix}=(\mathbb{x}_1\ \mathbb{x}_2\cdots\cdots\mathbb{x}_n)$$

① $x_i=x_j \Rightarrow \mathrm{rank}\ A<n$

$\because)\quad x_i=x_j \Rightarrow \mathbb{x}_i=\mathbb{x}_j$

$\therefore 0\cdot x_1 + \cdots\cdots + 1\cdot x_i + \cdots\cdots + (-1)\cdot x_j + \cdots + 0\cdot x_n = 0$ をみたす

これは自明でない一次関係式 $\therefore x_1, \cdots, x_n$：一次従属

$\therefore \mathrm{rank} < n$

OR $|A| = 0$ （i列$=j$列）

$\therefore x_1 \cdots\cdots x_n$：一次従属

② $|A|$は$(x_i - x_j)$で割り切れる
（$i \neq j$）

因数定理

$$\begin{array}{r} p(x) \\ x-a \overline{)\ f(x)\ } \\ (x-a)p(x) \\ \hline R \end{array}$$

$$f(x) - (x-a)p(x) = R$$

$$f(x) = (x-a)p(x) + R$$

$$\therefore R = f(a)$$

特に$f(a)=0$のとき$f(x)$は$(x-a)$で割り切れる

$$|A|(x_1, \cdots\cdots, \underset{\cup}{\overset{i}{x_j}}, \cdots, \underset{\cup}{\overset{j}{x_j}}, \cdots, x_n) \quad (i < j)$$

（i列$=j$列）

因数定理より$|A|$は$(x_i - x_j)$で割り切れる。

↓つづく

$$|A| \quad (x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots\cdots(x_1-x_n)$$
$$\times(x_2-x_3)\cdots\cdots(x_2-x_n)$$
$$\times(x_{n-1}-x_n)$$

で割り切れる

③
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{i_1} & x_{i_2} & x_{i_3} & \cdots & x_{i_r} \\ x_{i_1}^2 & x_{i_2}^2 & x_{i_3}^2 & \cdots & x_{i_r}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^{r-1} & x_{i_2}^{r-1} & x_{i_3}^{r-1} & \cdots & x_{i_r}^{r-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

とできる。 $\therefore \operatorname{rank} A = r$

$A = (a_{ij})$

$r \leqq \operatorname{rank} A \Leftrightarrow A$ の $r \times r$ 小行列式 $\neq 0$ なのがある

r 列を選び r 行を選び、交差する成分で

つくられる行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

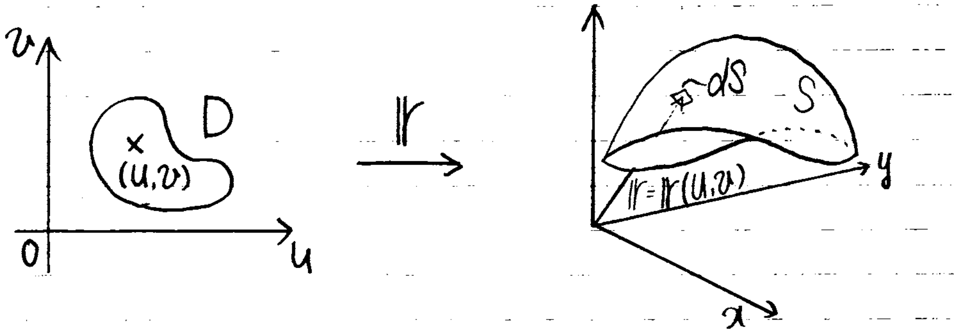
補

ベクトル解析より

$\varphi(x,y,z)$: スカラー場

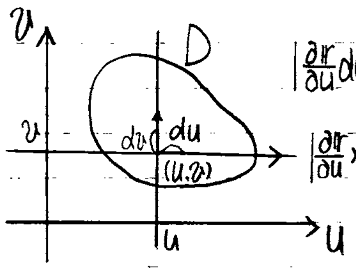
S : 曲面 $\quad \mathbf{r} = (x,y,z) = \mathbf{r}(u,v)$

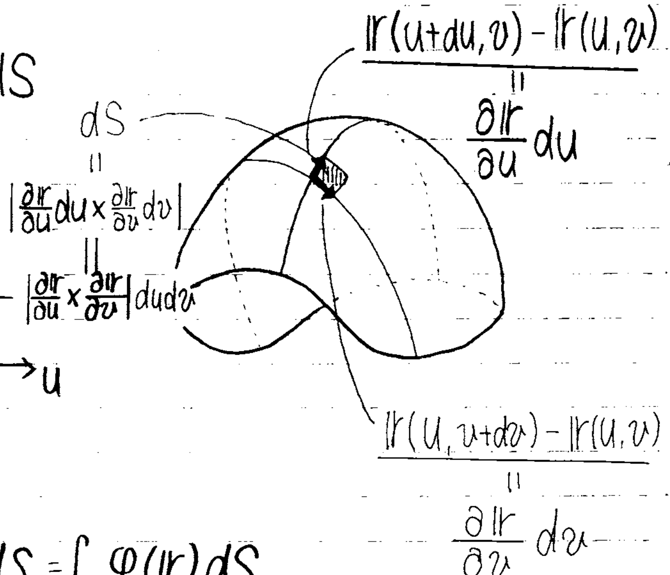
$= \mathbf{r}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$



φ : Sを含む領域で定義されている。

(面積分) $\displaystyle\int_S \varphi(x,y,z)\,dS$

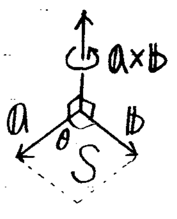




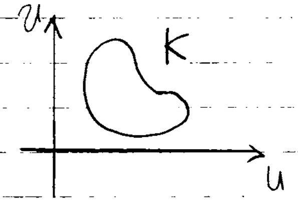
すると、

$$\int_S \varphi(x,y,z)\,dS = \int_S \varphi(\mathbf{r})\,dS$$

$$= \int_D \varphi(\mathbf{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

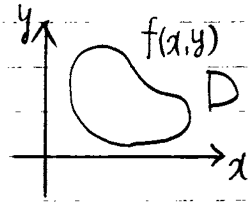


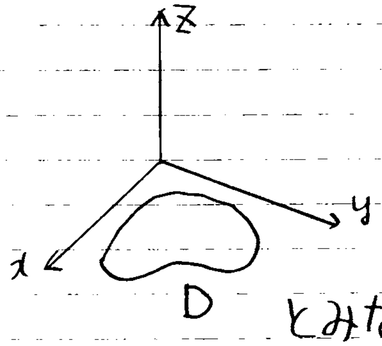
$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta = S$



$$\longrightarrow$$

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$z = 0$$





とみなす

$$\mathbb{r} = (x(u,v), y(u,v), 0)$$

$$\mathbb{r}_u = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, 0)$$

$$\mathbb{r}_v = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (x_v, y_v, 0)$$

$$\varphi(x,y,z) = f(x,y)$$

$$\mathbb{r}_u \times \mathbb{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \mathbb{k} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mathbb{k}$$

$$\therefore \; |\mathbb{r}_u \times \mathbb{r}_v| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

ベクトル解析より

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_K f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

参考書：応用数学 p.37〜