3月27日

Ｈ１１大坂（基礎工）　　　その１

１．実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{1-2x\cos y+x^2}}dy$$

とするとき，次の問いに答えよ．

（１） $f(0)$ を求めよ

（２）積分を用いずに $f(x)$ を表せ．

（３） $f(x)$ のグラフの概形を描け．

（４） $\int_1^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}f(x)dx$ を求めよ．

２．２次曲線　$x^2-4xy+5y^2=3$
を標準化して，そのグラフを書くことを考える．

（１）２次形式 $F=2x^2-4xy+5y^2$ の行列 A を求めよ．

（２）対称行列 A の固有値 α,β を求めると共に，それぞれに対応した大きさ1の固有ベクトル $\mathbf{u},\mathbf{v}$ を計算せよ．

（３）直交行列の定義を述べよ．また（２）で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ より２次の正方行列 $P=(\mathbf{u},\mathbf{v})$ を作成した場合，P が直交行列となっていることを示せ．

（４） P を用いて A を対角化せよ．

（５）（３）で求めた P を用いて，次式のようにもとの (x,y) 座標系から (x',y') 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

（６）２次曲線　$x^2-4xy+5y^2=3$　に対し（５）の座標変換を行い，新しい座標系 (x',y') で表現したときの式を求めよ．

（７）与えられた２次曲線　$x^2-4xy+5y^2=3$　の図を描け．

Ｈ１１大坂（基礎工）　その２

３．以下の問いに答えよ．ただし，$C(m,r)$は異なるm個のものからrとる組合せの数を表す．ただし，$C(m,r)$の値は$m \geq r$の場合は通常の定義に従うものとし，$m < r$の場合は$C(m,r)=0$と定めることにする．

（１）次の値をnを用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に書け．ただし，nは正の整数とする．

$$C(n,0)+2C(n,1)+3C(n,2)+\cdots+(n+1)C(n,n)$$

（２）２以上の整数nに対して条件[1]を満たす整数をx, y, zとする．

$$0 \leq x < y < z \leq n \qquad \cdots[1]$$

x, y, zの関数$f(x,y,z)$を次のように定義する．

$$f(x,y,z)=C(x,1)+C(y,2)+C(z,3)$$

条件[1]を満たす組(x, y, z)すべての集合を関数fの定義域とするとき，異なる値$f(x,y,z)$の個数$R(n)$を考える．すなわち，$R(n)$は関数fの値域の要素数である．$x_1 \neq x_2$あるいは$y_1 \neq y_2$あるいは$z_1 \neq z_2$のいずれかが成り立つとき，$f(x_1,y_1,z_1)=f(x_2,y_2,z_2)$となる場合は値$f(x_1,y_1,z_1)$を重複して勘定しないことに注意せよ．

（ａ）条件[1]を満たす(x, y, z)の組の個数（すなわち，関数fの定義域の要素数）をnを用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に書け．

（ｂ）$n=6$の場合，異なる$f(x,y,z)$の値をすべて列挙せよ．また，$R(6)$の値も書け．

（ｃ）一般のnに対して$R(n)$の値をnを用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に書け．

H11 大阪(基礎工)

1. 準備：ルジャンドルの多項式

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$$

....

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^2$$ ：ロドリグの公式

(1) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$

(2) $$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{1}{2n+1} & (m = n) \end{cases}$$

$\{P_n(x)\}_n$ 直交関数系

(3) $$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}}_{\text{ルジャンドルの多項式の母関数}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \cdots + P_n(x)t^n + \cdots\cdots$$

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1-2x\cos y + x^2}}\,dy$$

(1) $f(0)=\int_0^{\pi}\sin y\,dy$

$$=[-\cos y]_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2$$

(2) $f(x)=\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{1-2x\cos y+x^2}}dy$

$$\left[\begin{array}{l} t=\cos y\ ,\quad dt=-\sin y\,dy \\ \begin{array}{c|cc} y & 0 & \pi \\ \hline t & 1 & -1 \end{array}\end{array}\right]$$

$$=\int_1^{-1}\frac{\ominus dt}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

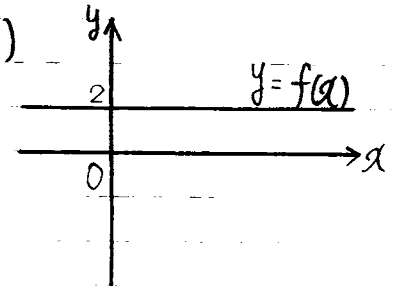
$$=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$=\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n\,dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\underbrace{\int_{-1}^{1}P_n(t)dt}_{\parallel}=2$$

$$\int_{-1}^{1}P_0(t)P_n(t)\,dt=\begin{cases}2 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}\qquad (\because (2))$$

(3)



(4) $\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{f(x)}\, dx$

$= 2 \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} [x^{\frac{1}{2}}]_0^{\infty}$

$= 4 \times \infty = \infty$ //

2. $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$

(1) $F = 2x^2 - 4xy + 5y^2$

$= \begin{matrix} 2x^2 & -2xy \\ -2xy & +5y^2 \end{matrix} = \begin{matrix} x(2x-2y) \\ +y(-2x+5y) \end{matrix}$

$= (x\ y)\begin{pmatrix} 2x-2y \\ -2x+5y \end{pmatrix} = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2) $|tE - A| = 0$

$= \begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 2 & t-5 \end{vmatrix}$

$= (t-2)(t-5) - 4 = t^2 - 7t + 10 - 4 = t^2 - 7t + 6$

$= (t-1)(t-6)$

$t = 1, 6$ ： Aの固有値

$$t\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$$

$$(tE - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

$t=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x+2y=0 \quad , \; x=2y$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t=6$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x+y=0 \quad , \; y=-2x$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

改めて

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 1, \; \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = 1$$

(3) $P=(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$\underset{(内積)}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}=\frac{1}{5}(2\cdot(-1)+1\cdot 2)=0$

P:直交行列 $\Longleftrightarrow$ ${}^tP\cdot P=E$

${}^tP\cdot P$

$={}^t(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})$

$=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{u}\\ {}^t\boldsymbol{v}\end{pmatrix}(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} & {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\\ {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{u} & {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore$ P:直交行列　　$P^{-1}={}^tP$

(4) $AP=A(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})$

$=(A\boldsymbol{u}\ \ A\boldsymbol{v})$

$=(1\boldsymbol{u}\ \ 6\boldsymbol{v})$

$=(1\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{v}\ ,\ 0\boldsymbol{u}+6\boldsymbol{v})$

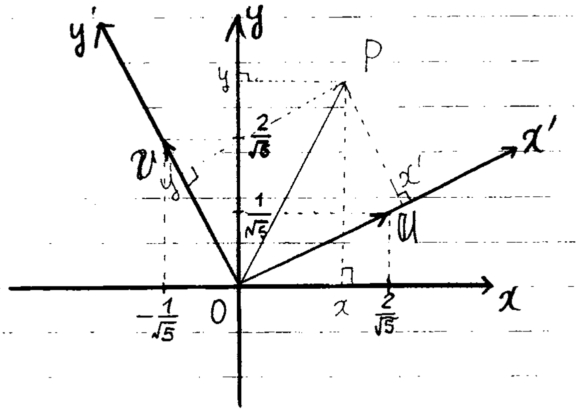
$=\underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}}_{D\text{とおく}}=PD$

$\therefore AP=PD$

${}^tP = P^{-1}$ を左から掛けて

$${}^tPAP = P^{-1}PD = D$$

$$\therefore\ {}^tPAP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$



(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$= (\mathbb{u}\ \mathbb{v}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$= x'\mathbb{u} + y'\mathbb{v}$

(6) $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$

$(x\ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$

${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$

(5) より

${}^t\left(P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) AP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3$

$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$

${}^t\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \underbrace{{}^tPAP}_{\substack{\parallel \\ D\ (\because (4))}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3$

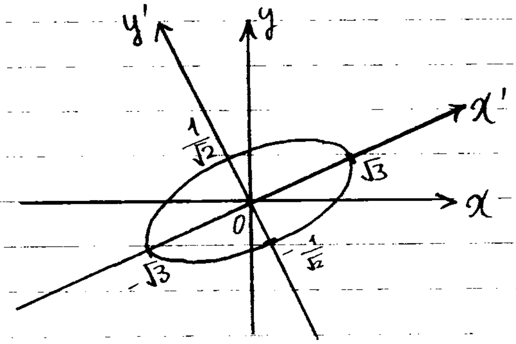
$(x'\ y') D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3$

$$(x' \ y')\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=3$$

$$(x')^2+6(y')^2=3$$

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{(y')^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1 \quad \text{楕円}$$

(7)



3. $C(m,r)=\begin{cases} {}_mC_r & (r\leqq m)\\ 0 & (r>m)\end{cases}$

(1) $C(n,0)+2C(n,1)+3C(n,2)+\cdots\cdots+(n+1)C(n,n)$

$=(n+1)2^{n-1}$

$\because$) 二項定理より

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k}b^k}$$

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}C(n,r)x^r$$

xを掛けて

$$x(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}C(n,r)x^{r+1}$$

両辺を微分

$$(1+x)^n+x\cdot n\cdot(1+x)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}(r+1)C(n,r)x^r$$

$x=1$を代入

$$2^n+n2^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}(r+1)C(n,r)$$

$$(n+1)2^{n-1}=C(n,0)+2C(n,1)+\cdots\cdots+(n+1)C(n,n)$$

(2) $0\leqq x<y<z\leqq n$ …… [1]

$$f(x,y,z)=C(x,1)+C(y,2)+C(z,3)$$

$R(n)$：fの異なる値の個数

(a) $M(n)$ $\{(x,y,z);[1]\}$の元の個数 $=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3!}$

∵) $\{0,1,2,\cdots\cdots,n\}$の$(n+1)$個から3個をとる

組合せの数 $C(n+1,3)$

(∵) $\{a,b,c\}$の組合せを大小の順に並べる

(a,b,c))

$M(n)$の元に順序を入れる

先ず

$$(x_1,y_1)<(x_2,y_2)\Leftrightarrow y_1<y_2 \text{ or } [y_1=y_2\Rightarrow x_1<x_2]$$

次に

$$(x_1y_1z_1)<(x_2y_2z_2)\Leftrightarrow z_1<z_2 \text{ or } [z_1=z_2\Rightarrow(x_1y_1)<(x_2y_2)]$$

↓つづく

(b) M(6)

$\overset{0}{(0,1,2)}$ $\overset{1}{(0,1,3)}$ $\overset{2}{(0,2,3)}$ $\overset{3}{(1,2,3)}$ $\overset{4}{(0,1,4)}$ $\overset{5}{(0,2,4)}$

$\overset{6}{(1,2,4)}$ $\overset{7}{(0,3,4)}$ $\overset{8}{(1,3,4)}$ $\overset{9}{(2,3,4)}$ $\overset{10}{(0,1,5)}$ $\overset{11}{(0,2,5)}$

$\overset{12}{(1,2,5)}$ $\overset{13}{(0,3,5)}$ $\overset{14}{(1,3,5)}$ $\overset{15}{(2,3,5)}$ $\overset{16}{(0,4,5)}$ $\overset{17}{(1,4,5)}$

$\overset{18}{(2,4,5)}$ $\overset{19}{(3,4,5)}$ $\overset{20}{(0,1,6)}$ $\overset{21}{(0,2,6)}$ $\overset{22}{(1,2,6)}$ $\overset{23}{(0,3,6)}$

$\overset{24}{(1,3,6)}$ $\overset{25}{(2,3,6)}$ $\overset{26}{(0,4,6)}$ $\overset{27}{(1,4,6)}$ $\overset{28}{(2,4,6)}$ $\overset{29}{(3,4,6)}$

$\overset{30}{(0,5,6)}$ $\overset{31}{(1,5,6)}$ $\overset{32}{(2,5,6)}$ $\overset{33}{(3,5,6)}$ $\overset{34}{(4,5,6)}$

$R(6)=35$ // $f(x,y,z)$の値 ↑(桃色の数値)

(c) $C(0,1)=0$

$C(x+1,1)=C(x,1)+1$

$C(y+1,2)=C(y,2)+y$

$C(z+1,3)=C(z,3)+\dfrac{z(z-1)}{2!}$

$(\because)\ \dfrac{(z+1)z(z-1)}{3!}-\dfrac{z(z-1)(z-2)}{3!}$

$=\dfrac{z(z-1)\{z+1-(z-2)\}}{3!}=\dfrac{z(z-1)3}{3!}=\dfrac{z(z-1)}{2!}$

$f(x,y,z)=C(x,1)+C(y,2)+C(z,3)$

$f(x,y,z)$は0から始まってM(n)に入れた順序で1ずつ足されていく $\therefore R(n)=C(n+1,3)$