2月13日　Ｈ１１岐阜

１．次の関数の導関数を求めよ．

$$\frac{1}{x}\sin x^2$$

２．次の極限値を求めよ．

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$

３．次の不定積分の値を求めよ．

$$\int x\sin x\,dx$$

４．行列方程式 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & k\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ の解を求めよ．ただし，k は常数である．

５．微分方程式　$y''+4y'+4y=0$　の一般解を求めよ．

６．ベクトル $\mathbf{a}=(1,1,2)^T$，$\mathbf{b}=(-1,a,a)^T$ の内積と外積を求めよ．

７．次の行列の個有値と固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

８．関数　$y=x^2+bx=c$　の最小値が関数　$y=x^3+2x^2+x+1$ の極値と等しくなる b と c を求めよ．

H11 岐阜

1. $\left(\frac{1}{x}\sin x^2\right)'$

$$= \frac{x(\sin x^2)' - (x)'\sin x^2}{x^2} = \frac{x \cdot 2x\cos x^2 - \sin x^2}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2\cos x^2 - \sin x^2}{x^2}$$

//

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

$\because$) マクローリン展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 \quad (0<\theta<1)$$

$f(x) = \cos x$ とすると　$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$　　$f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$　　$f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{\sin(\theta x)}{3!}x^3$$

$$\therefore 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{\sin(\theta x)}{3!}x^3$$

$$\therefore \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{2!} - \frac{\sin(\theta x)}{3!}x\right)$$

$$\xrightarrow[(x\to 0)]{} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

3. $\int x \sin x \, dx$

$= -\int x (\cos x)' dx$

$= -\left\{ x\cos x - \int (x)' \cos x \, dx \right\}$

$= -\left\{ x\cos x - \int \cos x \, dx \right\}$

$= -(x\cos x - \sin x) = \sin x - x\cos x$ //

4. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}}_{=A} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ —(※)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k+1$$

$k+1 \neq 0$ のとき

$$A = \frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ -k & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A^{-1}を左からかけて

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ -k & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

逆に $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると、(*)は k は何であっても満たされる

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. (*) $y''+4y'+4y=0$

変数を t にして考える

$\mathcal{L}[(*)]$より $(Y=\mathcal{L}[y],\ a=y(0),\ b=y'(0))$

$$s^2Y-\underset{a}{\underset{\parallel}{y(0)}}s-\underset{b}{\underset{\parallel}{y'(0)}}+4(sY-\underset{a}{\underset{\parallel}{y(0)}})+4Y=0$$

$$(s^2+4s+4)Y = as+4a+b = a(s+2)+2a+b$$

$$Y = \frac{a(s+2)+2a+b}{(s+2)^2} = \frac{a}{s+2} + \frac{2a+b}{(s+2)^2}$$

$$= A\frac{1}{s+2} + B\frac{1}{(s+2)^2}$$

$$(A = a, \quad B = 2a+b)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)](t) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) \end{array}}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+2} - \frac{B}{(s+2)^2}\right](t)$$

$$= e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} - \frac{B}{s^2}\right](t)$$

$$= e^{-2t}(A+Bt)$$

$t = x$として

$$y = y(x) = (A+Bx)e^{-2x} \;/\!/$$

6. $\mathbb{a} = (1, 1, 2) \quad \mathbb{b} = (-1, a, a)$

$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot a + 2 \cdot a = 3a - 1$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= (a - 2a)\,\mathbb{i} + (-2 - a)\,\mathbb{j} + (a+1)\,\mathbb{k}$$

$$= (-a, -(a+2), a+1)$$

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|tE - A|$

$$= \begin{vmatrix} t-5 & 4 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-5)(t-2) - 4 = t^2 - 7t + 10 - 4 = t^2 - 7t + \underset{-1\ -6}{6}$$

$$= (t-1)(t-6)$$

$t = 1, 6$: Aの固有値

$A\mathbb{v} = t\mathbb{v} = tE\mathbb{v}$

$(tE - A)\mathbb{v} = \mathbb{0} \quad (\mathbb{v} \neq \mathbb{0})$

$t = 1$のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No. 9 Date 3・13・後

$x+y=0$

$y=-x$ $\qquad v=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$t=6$のとき

$$\begin{pmatrix}1 & -4\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$x-4y=0$

$x=4y$ $\qquad v=\begin{pmatrix}4y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $\qquad v_2=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

8.
$$y=x^2+bx+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4c}{4}$$
$$(x,y)=\left(-\frac{b}{2},-\frac{b^2-4c}{4}\right)$$

$$y=f(x)=x^3+2x^2+x+1$$
$$f'(x)=3x^2+4x+1$$
$$=(3x+1)(x+1)$$
$$x=-1,-\frac{1}{3}$$
$$f(-1)=-1+2-1+1=1$$
$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}+\frac{2}{9}-\frac{1}{3}+1$$
$$=\frac{-1+6-9+27}{27}=\frac{23}{27}$$

$$\left(-\frac{b}{2},-\frac{b^2-4c}{4}\right)=(-1,1)\text{ or }\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$$

$(-1,1)$のとき

$\frac{b}{2}=1 \qquad \therefore b=2$

$$-\frac{b^2-4c}{4} = 1$$

$$-\frac{4-4c}{4} = 1$$

$$c-1 = 1 \qquad \therefore c=2$$

$(-1,1)$のとき $b=2,\ c=2$

$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{23}{27}\right)$のとき

$$\frac{b}{2}=\frac{1}{3} \qquad \therefore b=\frac{2}{3}$$

$$-\frac{b^2-4c}{4} = \frac{23}{27}$$

$$4c-b^2 = \frac{23\times4}{27}$$

$$\cancel{4}c = \frac{23\times\cancel{4}}{27}+\frac{\cancel{4}}{9}$$

$$c = \frac{23}{27}+\frac{1}{9} = \frac{26}{27}$$

$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{23}{27}\right)$のとき $b=\frac{2}{3},\ c=\frac{26}{27}$