H16出

［２４］Ｈ１０豊橋（数）

次の各問いに答えよ。

（１）$\sin A+\cos A=\sqrt{2}$のとき，$\sin A\cos A$および$\sin^4 A+\cos^4 A$の値を求めよ。

（２）$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$の逆関数を求めよ。

（３）次の極限値を求めよ。

イ．$\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

ロ．$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

（４）半径aの球に内接し，体積が最大になる直円柱の高さ，および直径を求めよ。

（５）平面上で直線$y=3x+2$上の点は，変換行列が

$$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$$

である１次変換により，どのような図形上に写像されるか答えよ。

解）

１）$\sin A+\cos A=\sqrt{2}$の両辺を２乗，

$\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A=2$，$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

故に，$\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}$

$\sin^4 A+\cos^4 A=\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)^2-2\sin^2 A\cos^2 A$

$=1-2(\sin A\cos A)^2=1-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

２）$y=f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$y=f^{-1}(x)$を求める逆関数とする。

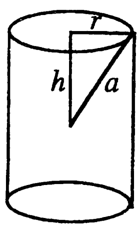
$x=f(y)=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，両辺に$2e^y$をかけて整理すると，

$\left(e^y\right)^2-2xe^y-1=0$，$e^y$について解くと，

$e^y=x\pm\sqrt{x^2+1}$，$0<e^y$故，$e^y=x-\sqrt{x^2+1}$は不適，従って

$e^y=x+\sqrt{x^2+1}$，対数をとって，$y=f^{-1}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

３）$2r$；直径，$2h$；高さ，$a^2=r^2+h^2$



$V=\pi r^2 2h=2\pi h\left(a^2-h^2\right)$

$\dfrac{dV}{dh}=2\pi\left(a^2-3h^2\right)=-6\pi\left(h-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(h+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$

$h=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$のときVは最大，答え高さ$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$，直径$\sqrt{\dfrac{8}{3}}a$

４）$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\3x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+2\\10x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\2u\end{pmatrix}$，　$(u=5x+2)$

$y=2x$に写される。

[２５］Ｈ１０豊橋（数）

$0<x$であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ。
ただし，logは自然対数を表す。

（１）$\log(x+1)<x$

（２）$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-1<\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

解）

１）$f(x)=\log(1+x)$とおき，$f(x)$をマクローリン展開する，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f(0)=0,\quad f'(0)=1$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\theta x)\quad (0<\theta<1)$$

$$\log(1+x)=0+x-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\theta x)^2}=x-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\theta x)^2}$$，故に

$$x-\log(x+1)=\frac{1}{2(1+\theta x)^2}>0$$

２）$y=\sqrt{t^2+1}$とおくと，$y^2=t^2+1$，$y\,dy=t\,dt$，だから

$$\int\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int\frac{y\,dy}{y}=\int dy=y=\sqrt{t^2+1}$$，従って

$$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^x=\sqrt{x^2+1}-1$$，以上より

$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)<\sqrt{x^2+1}$を示せばよい。

１）より，$\log(1+t)<t\quad(0<t)$だから，$t=\sqrt{2}$とおくと

$\log\left(1+\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}$，さて$g(x)=\sqrt{x^2+1}-\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$とおくと

$$g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$　ゆえに$x=1$のとき，$g(x)$は最小値

をとる。$g(1)=\sqrt{2}-\log\left(1+\sqrt{2}\right)>0$　　ゆえに　，

$$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-1<\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

[24] H10 豊橋 (数)

(1) $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$

$(\sin A + \cos A)^2 = 2$

$\sin^2 A + 2\sin A\cos A + \cos^2 A = 2$

$\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A = 2$

$1 + 2\sin A\cos A = 2$

$2\sin A\cos A = 1$ $\therefore \sin A\cos A = \frac{1}{2}$ //

$(\sin A + \cos A)^4 = \sqrt{2}^4 = 2^2 = 4$

$\sin^4 A + 4\sin^3 A\cos A + 6\sin^2 A\cos^2 A + 4\sin A\cos^3 A + \cos^4 A = 4$

$\sin^4 A + \cos^4 A + 4\sin A\cos A(\sin^2 A + \cos^2 A) + 6(\sin A\cos A)^2 = 4$

$\sin^4 A + \cos^4 A + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$

$\sin^4 A + \cos^4 A = 4 - 2 - \frac{6}{4} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ //

別解) $1^2 = (\sin^2 A + \cos^2 A)^2 = \sin^4 A + 2\sin^2 A\cos^2 A + \cos^4 A$

$\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2(\sin A\cos A)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ //

(2) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数は $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ を y について解くと

両辺 $\times\ 2e^y$ して

$2xe^y = e^{2y} - 1 \rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

$Y = e^y$ とおくと $Y^2 - 2xY - 1 = 0$

解の公式より $Y = \dfrac{2x \pm \sqrt{(-2x)^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$Y = e^y > 0$ なので $Y = x + \sqrt{x^2+1}$

$\log Y = \log e^y = y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ //

(3) イ. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$ //

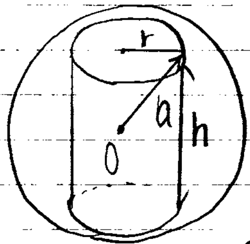
$t = \frac{1}{x}$, $x \to 0$, $t \to \infty$ とおくと $-1 \leqq \sin t \leqq 1$

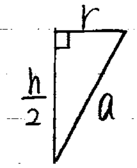
ロ、 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} \pm \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$ //

(4)





$\frac{h}{2} = \sqrt{a^2-r^2}$ $\therefore h = 2\sqrt{a^2-r^2}$

$V = \pi r^2 \times 2\sqrt{a^2-r^2} = 2\pi r^2\sqrt{a^2-r^2}$

$\displaystyle\frac{dV}{dr} = 2\pi \times 2r \times \sqrt{a^2-r^2} + 2\pi r^2 \times \left(-\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\right)$

$\left[\begin{array}{lll} t = a^2-r^2 & \frac{dt}{dr} = -2r & \frac{du}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ u = \sqrt{t} & \frac{du}{dt} = (t^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} & \end{array}\right]$

$\displaystyle = 4\pi r\sqrt{a^2-r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{a^2-r^2}} = \frac{4\pi r(a^2-r) - 2\pi r^3}{\sqrt{a^2-r^2}} = 0$

$\sqrt{a^2-r^2}>0$ より

$4\pi r(a^2-r^2)-2\pi r^3=0$

$4\pi a^2 r-4\pi r^3-2\pi r^3=0$

$4\pi a^2 r-6\pi r^3=0$

$2\pi r(2a^2-3r^2)=0$

$\therefore r=0,\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}a$

$r>0$ より　$r=\sqrt{\frac{2}{3}}a$

直径 $2r=2\sqrt{\frac{2}{3}}a$ //

高さ $h=2\sqrt{a^2-r^2}$

$=2\sqrt{a^2-\frac{2}{3}a^2}=2\sqrt{\frac{1}{3}a^2}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ //

(5) $y=3x+2$　　$f:\ A=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\3x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3x+2\\4x+6x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+2\\10x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+2\\2(5x+2)\end{pmatrix}$

$x'=5x+2,\ y'=2(5x+2)=2x'$

$y=3x+2$ は f によって $y=2x$ に写される

[25] H10 豊橋

$0<x$

(1) $\log(x+1)<x$

マクローリン展開 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\theta x)x^n$ $0\leqq\theta<1$

2次までマクローリン展開すると

$f(x)=\log(x+1),\quad f'(x)=\frac{1}{x+1},\quad f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\theta x)x^n \ (0\leqq\theta<1)$

$\log(x+1)=\log 1+\frac{1}{0+1}x-\frac{1}{2}\frac{1}{(\theta x+1)^2}x^2$

$\log(x+1)=x-\frac{1}{2}\frac{1}{(\theta x+1)^2}x^2$

ここで $\theta x>0$ なので

$x>x-\frac{1}{2}\frac{1}{(\theta x+1)^2}x^2=\log(x+1)$ //

(2) $\log(x+\sqrt{x^2+1})-1<\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

$u=\sqrt{t^2+1}$ とおくと

$$\frac{du}{dt}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \quad \therefore\ dt=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}du$$

$$\left[\begin{array}{lll} w=t^2+1 & \frac{dw}{dt}=2t & \\ u=\sqrt{w} & \frac{du}{dw}=\frac{1}{2\sqrt{w}} & \frac{du}{dt}=\frac{2t}{2\sqrt{w}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \end{array}\right]$$

$$t:0\sim x \rightarrow u:1\sim\sqrt{x^2+1}$$

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int_1^{\sqrt{x^2+1}}\frac{\cancel{t}}{\cancel{\sqrt{t^2+1}}}\frac{\cancel{\sqrt{t^2+1}}}{\cancel{t}}du=\int_1^{\sqrt{x^2+1}}du$$

$$=\sqrt{x^2+1}-1$$

$$\therefore\ \log(x+\sqrt{x^2+1})-1<\sqrt{x^2+1}-1$$

$$\log(x+\sqrt{x^2+1})<\sqrt{x^2+1}$$

$$\sqrt{x^2+1}-\log(x+\sqrt{x^2+1})>0$$

$g(x)=\sqrt{x^2+1}-\log(x+\sqrt{x^2+1})$ とおくと

$g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=0$ とおくと $x=1$

$$\left[\begin{array}{lll} u=x+\sqrt{x^2+1} & \frac{du}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \\ y=\log u & \frac{dy}{du}=\frac{1}{u} & \frac{dy}{dx}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}\right]$$

$$g''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}>0$$

$\therefore\ g(x)$ は $x=1$ で最小値をとる

$$g(1)=\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})$$

(1)より $t > \log(1+t)$ なので $\sqrt{2} > \log(1+\sqrt{2})$

$\therefore\ g(a) > 0$

$\therefore\ \log(x+\sqrt{x^2+1})-1 < \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$