1月30日

［３３］Ｈ１０東工大

$$A=\begin{pmatrix}-13 & 12 & 6\\ -12 & 11 & 6\\ -6 & 6 & 2\end{pmatrix}$$ とおく。

1）$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ。

2）実直交行列 P で上の性質をもつものは存在するか？Ｙｅｓならば例をみつけよ。'Ｎｏならばその理由を記せ。

解）

1）$(tE-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}$,

$$|tE-A|=\begin{vmatrix}t+13 & -12 & -6\\ 12 & t-11 & -6\\ 6 & -6 & t-2\end{vmatrix}=t^3-3t-2=(t-2)(t+1)^2$$

$t=2,-1$（重解）；固有値

$t=2$ のとき，$\begin{pmatrix}15 & -12 & -6\\ 12 & -9 & -6\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ より $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

$t=-1$ のとき，$\begin{pmatrix}12 & -12 & -6\\ 12 & -12 & -6\\ 6 & -6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ より $2x-2y-z=0$

$z=2x-2y$ 故に，$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 2x-2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$，

$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$　そこで，$P=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$ とおくと $|P|=1$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 5 & -4 & -2\\ 4 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$AP=A(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=(A\mathbf{v}_1,A\mathbf{v}_2,A\mathbf{v}_3)$$

$$=(2\mathbf{v}_1,-1\mathbf{v}_2,-1\mathbf{v}_3)=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=PD$$

$$P^{-1}AP=D=diag(2,-1,-1)$$

2）もし，そのような P があったとすると，$P^{-1}AP=D$（対角行列）

すると，$A=PDP^{-1}$，　${}^tPP=E$ 故，$P^{-1}={}^tP$ だから

$A=PD{}^tP$。また ${}^tD=D$ に注意して

${}^tA={}^t(PD{}^tP)={}^t({}^tP){}^tD{}^tP=PD{}^tP=A$　ゆえに A は対称行列，矛盾。

従ってそのような P は存在しない。

［３４］Ｈ１０東工大

$\mathbf{0}$でないどんな実ベクトル(x,y,z)に対しても，

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & a & -a\\ a & 1 & a\\ -a & a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}>0$$

となるのは，どんな実数のときか。

解）$A=\begin{pmatrix}1 & a & -a\\ a & 1 & a\\ -a & a & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$とおくと，$A$は対称行列…：${}^tA=A$

${}^t\mathbf{v}A\mathbf{v}>0$，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1 & -a & a\\ -a & t-1 & -a\\ a & -a & t-1\end{vmatrix}=(t-a-1)^2(t-1+2a)$

$t=1-2a\,,1+a$（２重解）；Aの固有値

一般論から固有ベクトルを$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$；

$A\mathbf{v}_1=(1-2a)\mathbf{v}_1$，$A\mathbf{v}_2=(1+a)\mathbf{v}_2$，$A\mathbf{v}_3=(1+a)\mathbf{v}_3$

とすると$P=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$は直交行列で

${}^tPAP=diag(1-2a,1+a,1+a)$　変換$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}=P\mathbf{V}$で

${}^t\mathbf{v}A\mathbf{v}>0$は${}^t\mathbf{V}\,{}^tPAP\mathbf{V}=(1-2a)X^2+(1+a)Y^2+(1+a)Z^2>0$

これが常に成り立つためには$0<1-2a$，$0<1+a$，ゆえに

$-1<a<\dfrac{1}{2}$

月30日

［35］H10東工大

微分方程式　（＊）$\dfrac{dy}{dx}=y+xy^2$　を考える。

1）$z(x)=\dfrac{1}{y(x)}$はどんな微分方程式をみたすか。

2）（＊）の一般解を求めよ。

解）

1）$z'(x)=\dfrac{-y'(x)}{y(x)^2}=\dfrac{-y-xy^2}{y^2}=-\dfrac{1}{y}-x=-z-x$.

故に，$z'+z=-x$

2）$z=e^{-\int dx}\left\{-\int xe^{\int dx}dx+c\right\}=e^{-x}\left\{-\int xe^{x}dx+c\right\}$

$=e^{-x}\left\{-xe^{x}+e^{x}+c\right\}=-x+1+ce^{-x}$

$y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{-x+1+ce^{-x}}$

参考；$y'+py=q\Rightarrow y=e^{-\int pdx}\left[\int qe^{\int pdx}dx+c\right]$

［３６］Ｈ１０東工大

(x,y)平面内の領域$D=\{(x,y);0\leq y\leq x\leq 1\}$における重責分

$$I=\iint_D \sqrt{2x^2-y^2}\,dxdy$$

を計算せよ。

解）$I=\iint_D \sqrt{2x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^1\int_0^x \sqrt{\left(\sqrt{2}x\right)^2-y^2}\,dydx$

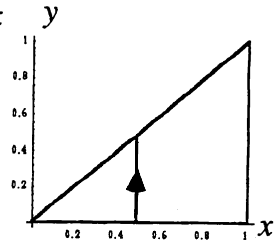
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left\{y\sqrt{2x^2-y^2}+2x^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{2}x}\right)\right\}\right]_0^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{x\sqrt{2x^2-x^2}+2x^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}x}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{x\sqrt{x^2}+2x^2\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{x^2+2x^2\frac{\pi}{4}\right\}dx$$

$$=\frac{\pi+2}{4}\int_0^1 x^2dx=\frac{\pi+2}{12}$$



参考；$(0<a)\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$

[33] H 10 東工大

$$A=\begin{pmatrix}-13 & 12 & 6\\ -12 & 11 & 6\\ -6 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

1) $|\lambda E-A|v=0$

$|\lambda E-A|=0$

$$\begin{vmatrix}\lambda+13 & -12 & -6\\ 12 & \lambda-11 & -6\\ 6 & -6 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+13 & \lambda+1 & -6\\ 12 & \lambda+1 & -6\\ 6 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda+13 & 1 & -6\\ 12 & 1 & -6\\ 6 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$\times 1$

$$=(\lambda+1)\{(\lambda+13)(\lambda-2)\cancel{-36}\cancel{+36}-12(\lambda-2)\}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+13-12)$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$$

$\therefore \lambda=2,-1$ (重解)

$\lambda=-1$: $\begin{pmatrix}12 & -12 & -6\\ 12 & -12 & -6\\ 6 & -6 & -3\end{pmatrix}v=0$ $\quad v=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ とおくと

$$2x-2y-z=0 \qquad z=2x-2y$$

$$\therefore v_1=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 2x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+0y\\ 0+y\\ 2x-2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore v_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad v_{12}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix}15 & -12 & -6\\ 12 & -9 & -6\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}v=0$

$$\begin{cases} 15x-12y-6z=0 \\ 12x-9y-6z=0 \\ 6x-6y\quad=0 \end{cases} \qquad 15x-12x-6z=3x-6z=0$$

$$x=y \qquad z=\frac{1}{2}x$$

$$v=\begin{pmatrix} x \\ x \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix}=\frac{1}{2}x\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P=(v_1, v_2\ v_3)$とおくと $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|P|=1-4+4=1 \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=P^{-1}A(v_1\ v_2\ v_3)=P^{-1}(Av_1\ Av_2\ Av_3)$$

$$=P^{-1}(-v_1\ -v_2\ 2v_3)$$

$$=P^{-1}(v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=P^{-1}P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Pは実直交行列 , ${}^tPP=E$, ${}^tP=P^{-1}$ $|P|=1$

$P^{-1}AP=D$（対角行列）とすると $A=PDP^{-1}$ となる。

このようなPが存在するとすると、

$A=PDP^{-1}=PD{}^tP$ 。ここで 両辺の転置をとると

$${}^tA = {}^t(PD\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^tD\,{}^tP = P\,{}^tD\,{}^tP$$

ここで対角行列Dの転置もDだから ${}^tD = D$

$$\therefore {}^tA = P\,{}^tD\,{}^tP = PD\,{}^tP = PDP^{-1} = A$$

よって ${}^tA = A$。Aは対称行列とは限らないから矛盾。

$\therefore$ そのようなPは存在しない。

[34] H10 東工大

$(x, y, z) \neq 0$

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > 0$$

解) $\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化し、$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと

$$^tX\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}X = {}^tX\,P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}PX$$

Pは直交行列より $^tP = P^{-1}$

$$^tX\,{}^tP\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)PX = {}^t(PX)\,diag(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)PX$$

ここで新に $PX = X'$ とおいて

$$^tX'\,diag(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)X > 0$$

を求める。

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & a \\ -a & \lambda-1 & -a \\ a & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1-a & \lambda-1-a & 0 \\ -a & \lambda-1 & -a \\ 0 & \lambda-1-a & \lambda-1-a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1-a)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -a & \lambda-1 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1-a)^2(\lambda-1+a+a)$$

$$= (\lambda-1-a)^2(\lambda-1+2a) = 0$$

$\therefore\ \lambda = 1+a$ (重解), $1-2a$

この固有値から互いに垂直で長さ0のベクトル v_1, v_2, v_3 を

選ぶと $P=(v_1, v_2\ v_3)$ として一般に

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1+a, 1+a, 1-2a)$$

$$(x\ y, z)P^{-1}\begin{pmatrix}1+a & 0 & 0\\ 0 & 1+a & 0\\ 0 & 0 & 1-2a\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} > 0$$

$\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ とおくと

$$(X\ Y Z)\begin{pmatrix}1+a & 0 & 0\\ 0 & 1+a & 0\\ 0 & 0 & 1-2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} > 0$$

(x, y, z) についても $(X\ Y Z)$ についても a の範囲は同じだから

$$(1+a)X^2 + (1+a)Y^2 + (1-2a)Z^2 > 0$$

どんな (X, Y, Z) に対しても成り立つためには

$1+a>0$ かつ $1-2a>0$

$a>-1$ かつ $a<\frac{1}{2}$

$\therefore\ -1 < a < \frac{1}{2}$

[35] H10 東工大

$$\frac{dy}{dx} = y + xy^2$$

1) $z(x) = \frac{1}{y(x)}$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2}(y + xy^2) = -x - \frac{1}{y} = -x - z_{//}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + z = -x$$

2) $\frac{dy}{dx} = y + xy^2$ を(1)を用いると

$$\frac{dz}{dx} + z = -x$$

zの一般解は

$\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$ の一般解

$$z = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

で求められるから　$P(x) = 1$, $Q(x) = -x$ として

$$z = e^{-\int dx}\left[\int -xe^{\int dx}dx + C\right]$$

$$= e^{-x}\left[-\int xe^{x}dx + C\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int (x)'e^x dx \\ \qquad = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) \end{array}\right]$$

$$= e^{-x}\{-(e^x(x-1)) + C\} = -e^{-x}(e^x x - e^x - C)$$

$$= -x + 1 + Ce^{-x}$$

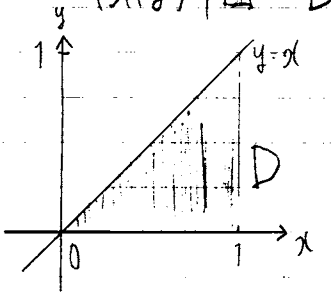
$$Z(x) = -x + 1 + ce^{-x}$$

$$Z(x) = 1/y(x) \quad \therefore\ y(x) = 1/Z(x)$$

$$\therefore\ y(x) = \frac{1}{-x+1+ce^{x}} \quad //$$

[36] H10 東工大

(x,y)平面 $D=\{(x,y)\ ;\ 0\leqq y\leqq x\leqq 1\}$



$$I=\iint_D \sqrt{2x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^x \sqrt{2x^2-y^2}\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^x \sqrt{(\sqrt{2}x)^2-y^2}\,dy\,dx$$

$$\left[\ \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+C\ \right]$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}\left[y\sqrt{2x^2-y^2}+2x^2\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}x}\right]_0^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\sqrt{2x^2-x^2}+2x^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \qquad \left[\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2+\frac{\pi}{2}x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2+\pi}{2}\right)\frac{1}{3}=\frac{\pi+2}{12}\ //$$