［１０］Ｈ１０奈良Ｂ

直線$y=2x$に関する対称移動をfとし，原点のまわりの$\dfrac{\pi}{6}$の回転移動をgとする。一次変換f, gの表す行列をそれぞれA, Bとする。このとき次の各問に答えよ。

（１）行列AとBを求めよ。

（２）合成変換$g\circ f$の表す行列を求めよ。

（３）$g\circ f$の逆変換の表す行列を求めよ。

解）

1）$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$とすると，２点$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$の中点$\begin{pmatrix} \frac{x+X}{2} \\ \frac{y+Y}{2} \end{pmatrix}$は直線$y=2x$上にある．

故に，$\dfrac{y+Y}{2}=2\dfrac{x+X}{2}$ $\therefore$ $2X-Y=-2x+y\cdots\cdots$①

２点$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$を結ぶ直線は直線$y=2x$と直交，だからその傾き$\dfrac{Y-y}{X-x}$と直線$y=2x$の傾き２の積は－１，$\therefore$ $X+2Y=x+2y\cdots\cdots$②

①，②を連立させてX, Yについて解くと，

$X=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y$，$Y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y$，以上より$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

故に，$A=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；基本ベクトル系

$g(\mathbf{e}_1)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$g(\mathbf{e}_2)=\begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$，従って，

$B=\left(g(\mathbf{e}_1), g(\mathbf{e}_2)\right)=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

2）$BA=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -4-3\sqrt{3} & -3+4\sqrt{3} \\ -3+4\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

3）$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$，$f^{-1}=f$ & $g^{-1}\leftrightarrow B^{-1}$；$-\dfrac{\pi}{6}$回転

$B^{-1}=\left(g^{-1}(\mathbf{e}_1), g^{-1}(\mathbf{e}_2)\right)=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}=AB^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -4-3\sqrt{3} & -3+4\sqrt{3} \\ -3+4\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

［１１］Ｈ１０奈良Ｂ

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$とする。このとき，次の各問に答えよ。

（１）$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ。

（２）$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角θを求めよ。

解）

１）$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$の両辺を２乗して，$\left|\vec{x}\right|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}$だから，

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=3$，$\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=3$，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$だから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$.

２）$\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$　故に$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$0\leq\theta\leq\pi$　だから，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

11月21日

［１２］Ｈ１０奈良Ｂ

a, b, cを定数として，$f(x)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{x}(a\sin t+b\cos t+c)dt$とする。関数$f(x)$が$x=\dfrac{\pi}{4}$で極値$2-\pi$をとる。このとき，次の各問に答えよ。

（１）a, bをcを用いて表せ。

（２）曲線上の点$\left(-\dfrac{\pi}{4}, f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$におけるこの曲線の接線が原点$(0,0)$を通るとき，定数$a, b, c$の値を求めよ。

（３）（２）のとき，関数$f(x)$を求めよ。

解）

１）$f'(x)=a\sin x+b\cos x+c$，$f'(\frac{\pi}{4})=0$，$a\dfrac{1}{\sqrt{2}}+b\dfrac{1}{\sqrt{2}}+c=0$

$a+b=-\sqrt{2}c\cdots\cdots①$

$f(\frac{\pi}{4})=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(a\sin t+b\cos t+c)dt=2b\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt+2c\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dt$

$=2b[\sin t]_{0}^{\frac{\pi}{4}}+2c\dfrac{\pi}{4}=2b\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{c\pi}{2}=\sqrt{2}b+\dfrac{c\pi}{2}$

（$\because$　$\sin t$；奇関数，$\cos t$；偶関数）

$\sqrt{2}b+\dfrac{c\pi}{2}=2-\pi\cdots\cdots②$

①，②より，$a=\dfrac{\pi-4}{2\sqrt{2}}c+\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}$，$b=-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}c+\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

２）$f'(-\frac{\pi}{4})=a\sin(-\frac{\pi}{4})+b\cos(-\frac{\pi}{4})+c=-a\frac{1}{\sqrt{2}}+b\frac{1}{\sqrt{2}}+c$

$f(-\frac{\pi}{4})=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}(a\sin t+b\cos t+c)dt=0$，$\left(-\dfrac{\pi}{4}, f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$での接線は

$y-0=\left(\dfrac{-a+b}{\sqrt{2}}+c\right)\left(x-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$，これが$(0,0)$を通るから，

$\dfrac{-a+b}{\sqrt{2}}+c=0$，故に$-a+b=-\sqrt{2}c\cdots\cdots③$　以上より

$c=-2$

［１３］Ｈ１０奈良Ｂ

$f(x)=(x-1)e^{-x}$とおくとき，次の各問に答えよ。

（１）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$を求めよ。

（２）$\displaystyle\lim_{x\to(-\infty)}f(x)$を求めよ。

（３）増減表を求めて，$y=f(x)$のグラフを書け。

解）

1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$

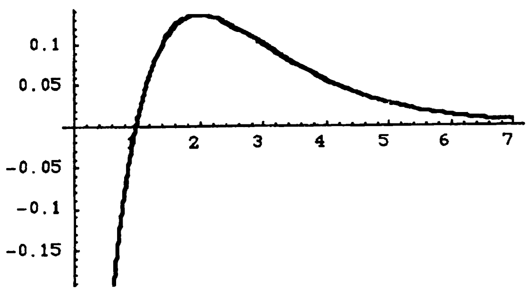
（∵　ロピタル）

2）$\displaystyle\lim_{x\to(-\infty)}f(x)=\lim_{x\to\infty}(-x-1)e^x=-\lim_{x\to\infty}(x+1)e^x=-\infty$

3）$f'(x)=e^{-x}-(x-1)e^{-x}=e^{-x}(2-x)$

$f''(x)=-e^{-x}(2-x)-e^{-x}=e^{-x}(x-3)$

x		2		3	
f'	+	0	−		
f''	−			0	+
f	↗		↘		↘



11月21日

[14] H10奈良B

(1) 関数$f(x)$が$x=a$で微分可能であるとはどういうことか。その定義を述べよ。

(2) $0<x$とする。関数$f(x)=\sqrt{x}$が$x=0$で微分可能であるかどうか。理由を書いて答えよ。

解)

1) 先ず，$x=a$で連続，つまり$f(a)$が有限確定でかつ$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

その上，$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$が存在するとき$f(x)$が$x=a$で微分可能であるという.

2) $f(0)=\sqrt{0}=0$；有限確定，$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$従って$f(x)=\sqrt{x}$は$x=0$で微分可能ではない。