［5］H10奈良A

$m \neq 0$とする。$xy$平面において，直線$y=mx$に関する対称移動を$f$とし，一次変換の表す行列を$A(m)$とする。このとき，次の各問に答えよ。

（1）$A(m)$を求めよ。

（2）$A(m)+A\left(\dfrac{1}{m}\right)$を求めよ。

（3）$A(m)+A\left(-\dfrac{1}{m}\right)$を求めよ。

解）

（1）ベクトル$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$の$f$による像を$\mathbf{V}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$とすると$\begin{pmatrix} \dfrac{x+X}{2} \\ \dfrac{y+Y}{2} \end{pmatrix}$は$y=mx$上

にある。ゆえに，$mX-Y=-mx+y \cdots ①$　さらに$\mathbf{v}$と$\mathbf{V}$の表す点を結んだ直線の傾きが$-\dfrac{1}{m}$つまり，$\dfrac{Y-y}{X-x}=-\dfrac{1}{m}$　ゆえに，$X+mY=x+my \cdots ②$

$$X=\frac{(1-m^2)x+2my}{1+m^2},\quad Y=\frac{2mx+(m^2-1)y}{1+m^2}，\text{以上より}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A(m)=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

（2）$$A(m)+A\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{1+\frac{1}{m^2}}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m^2} & 2\frac{1}{m} \\ 2\frac{1}{m} & \frac{1}{m^2}-1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} m^2-1 & 2m \\ 2m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 0 & 4m \\ 4m & 0 \end{pmatrix}=\frac{4m}{1+m^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（3）$$A\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{m^2}}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m^2} & -2\frac{1}{m} \\ -2\frac{1}{m} & \frac{1}{m^2}-1 \end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

$$A(m)+A\left(-\frac{1}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{pmatrix}=0$$

4日

［6］H10奈良A

$xy \neq 0$とする。空間内に原点$O$と3点$A(2x+y, x-2y, xy)$，$B(-2,1,1)$，

$C(4,-1,1)$があり，ベクトル$\overrightarrow{OA}$が2つのベクトル$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$に垂直である。このとき，次の各問に答えよ。

（1）$x$，$y$の値を求めよ。

（2）$\angle BOC = \theta$とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

（3）四面体$OABC$の体積を求めよ。

解）

（1）$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$より，$-2(2x+y)+(x-2y)+(xy) = xy-3x-4y = 0$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$より，$4(2x+y)-(x-2y)+xy = xy+7x+6y = 0 \cdots$①

$\therefore\ \ x+y=0$　①より　$xy+x+6(x+y)=0$，$\therefore\ \ x(y+1)=0$

故に，$x=0$，$y=-1$　　$(x,y)=(0,0)$，$(1,-1)$題意より$A \neq O$

ゆえに$(x,y)=(1,-1)$

xyで割っても可

（2）$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta$より

$(-2)\cdot 4 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = \sqrt{4+1+1}\sqrt{16+1+1}\cos\theta \therefore \cos\theta = -\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

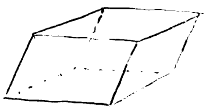
（3）$A(2-1, 1-2(-1), 1(-1)) = (1,3,-1)$求める体積を$V$とすると，

$$3V = \pm\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \times(-1) \\ \ \end{matrix} = \pm\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = \pm 22$$

$V>0$ゆえ$V = 22/3$

参考；［角錐の体積］＝$\dfrac{1}{3}$×［角柱の体積］

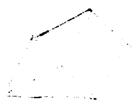
これは平行六面体の体積



訂正

$\downarrow \times \frac{1}{2}$

角柱の体積



よって$V = \frac{22}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{3}$

［７］Ｈ１０奈良Ａ

$f(x)=\log x+\dfrac{2}{x}\int_0^1 x^2 g(x)dx$，$g(x)=e^{-x}+3\int_1^e f(x)dx$で

$a=\int_0^1 x^2 g(x)dx,\ \ b=\int_1^e f(x)dx$ とおいて$a,\ b$を求めて$f(x)$と$g(x)$を求めよ。

解）$f(x)=\log x+\dfrac{2}{x}a$，$g(x)=e^{-x}+3b$

$$a=\int_0^1 x^2\left(e^{-x}+3b\right)dx=-\int_0^1 x^2\left(e^{-x}\right)'dx+b\int_0^1 3x^2dx$$

$$=-\left\{\left[x^2e^{-x}\right]_0^1-2\int_0^1 xe^{-x}dx\right\}+b\left[x^3\right]_0^1$$

$$=-\left\{e^{-1}+2\int_0^1 x\left(e^{-x}\right)'dx\right\}+b$$

$$=-\left\{e^{-1}+2\left(\left[xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx\right)\right\}+b=-\left\{e^{-1}+2\left(e^{-1}+\left[e^{-x}\right]_0^1\right)\right\}+b$$

$$=-\left\{e^{-1}+2e^{-1}+2\left(e^{-1}-1\right)\right\}+b=-5e^{-1}+2+b$$

ゆえに，$a-b=-5e^{-1}+2\cdots$①

$$b=\int_1^e\left(\log x+\frac{2}{x}a\right)dx=\left[x\log x-x\right]_1^e+2a\left[\log x\right]_1^e$$

$$=e\log e-e-(0-1)+2a(\log e-0)=1+2a$$

ゆえに，$2a-b=-1\cdots$②

以上より，$a=5e^{-1}-3$，$b=10e^{-1}-5$

従って，$f(x)=\log x+2\left(5e^{-1}-3\right)\dfrac{1}{x}$，$g(x)=e^{-x}+3\left(10e^{-1}-5\right)$

11月14日

［8］Ｈ１０奈良Ａ

$0<x$として，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$とおくとき，次の各問に答えよ。

（１）$\lim\limits_{x\to+0} f(x)$を求めよ。

（２）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$を求めよ。

（３）増減表を求めて$y=f(x)$のグラフを書け。

解）

（１）$t=-\log x$とおくと，$x=e^{-t}$，$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{-t}{e^{-t}}=-te^{t}$　そして

$(x\to+0)\Leftrightarrow(t\to\infty)$だから

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\lim\limits_{t\to\infty} te^{t}=-\infty$

ロピタルでも可

（２）$t=\log x$とおくと，$x=e^{t}$，$(x\to\infty)\Leftrightarrow(t\to\infty)$

$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{t}{e^{t}}=\dfrac{t}{1+t+\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{6}t^{3}e^{\theta t}}<\dfrac{t}{\frac{1}{2}t^{2}}=\dfrac{2}{t}\to 0\,(t\to\infty)(0<\theta<1)$

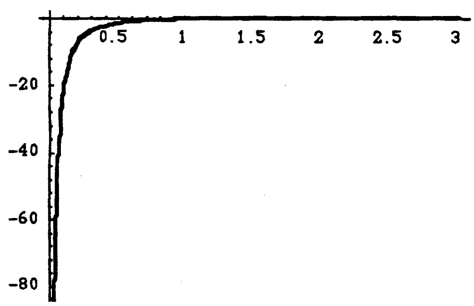
（マクローリン展開）

マクローリンもできるように

（３）$f'(x)=\dfrac{x(\log x)'-1\cdot\log x}{x^{2}}=\dfrac{x\frac{1}{x}-\log x}{x^{2}}=\dfrac{1-\log x}{x^{2}}$ゆえに

$f'(x)=0\Rightarrow\log x=1\Rightarrow x=e$

| $x$ | $+0$ | | $e$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $e^{-1}$ | ↘ | $0$ |
| | | | | | |



［９］Ｈ１０奈良Ａ

（１）$x=a$で定義されている関数$f(x)$が$x=a$で連続であるとはどういうことか定義を述べよ。

（２）閉区間$[0,3]$において連続な関数$f(x)$が下の条件を満たし，$f(0)=a$であるとする。このとき$\int_0^3 f(x)dx$を求めよ。

$$f'(x)=\begin{cases} 4ax^3+3ax^2-2ax & (0\leq x\leq 1) \\ 3ax^2-2ax & (1<x\leq 2) \\ 2ax-2a & (2<x\leq 3) \end{cases}$$

解）

（１）先ず$f(a)$の値が有限確定である。たとえば，$f(x)=\dfrac{1}{x}$では$f(0)$は定義されていない。そして，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$をみたすとき$f(x)$は$x=a$で連続であるという。

（２）仮定より $f(x)=\begin{cases} ax^3+ax^3-ax^2+a(0\leq x\leq 1) \\ ax^3-ax^2+2a\,(1<x\leq 2) \\ ax^2-2ax+6a \quad (2<x\leq 3) \end{cases}$

$$\int_0^3 f(x)dx=\left(\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3\right)f(x)dx$$

$$=a\int_0^1\left(x^4+x^3-x^2+1\right)dx+a\int_1^2\left(x^3-x^2+2\right)dx+a\int_2^3\left(x^2-2x+6\right)dx$$

$$=a\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)+a\left\{\frac{1}{4}\left[x^4\right]_1^2-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2+2[x]_1^2\right\}$$

$$+a\left\{\frac{1}{3}\left[x^3\right]_2^3-\left[x^2\right]_2^3+6[x]_2^3\right\}$$

$$=a\frac{67}{60}+a\cancel{\frac{13}{6}}+a\frac{22}{3}=\cancel{\frac{637}{60}}a$$

$\frac{41}{12}$ $\frac{178}{15}$