［１５］Ｈ１０長岡

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

（１）Aが正則であるための条件を求めよ。

（２）Aが正則であるとき，その逆行列A^{-1}を求めよ。

解）

１）$|A|\neq 0$，$|A|=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}e=(ad-bc)e$，故に $ad-bc\neq 0$ & $e\neq 0$

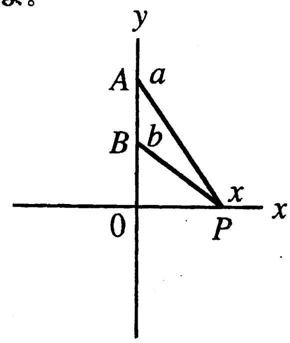
２）$$A^{-1}=\frac{1}{(ad-bc)e}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{(ad-bc)e}\begin{pmatrix} de & -be & 0 \\ -ce & ae & 0 \\ 0 & 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

11月28日

［１６］Ｈ１０長岡

$a>b>0$とする。y軸上に２点$A(0,a)$，$B(0,b)$を取り，点Pがx軸の正の部分を動くとき$\angle APB$を最大にするPの位置を求めよ。

解）



$$\angle APB=f(x)=\tan^{-1}\frac{a}{x}-\tan^{-1}\frac{b}{x}$$

$$f'(x)=\frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}-\frac{-\frac{b}{x^2}}{1+\left(\frac{b}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-a}{x^2+a^2}-\frac{-b}{x^2+b^2}$$

$$=\frac{-a\left(x^2+b^2\right)+b\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$$

$$=\frac{-(a-b)x^2+ab(a-b)}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$$

$$=\frac{-(a-b)\left(x^2-ab\right)}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{ab}\quad(\because x>0)$$

［17］H10長岡

$f(x)$を連続関数とするとき以下の問いに答えよ。

（1）$\dfrac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt$を求めよ。

（2）つぎの等式が成り立つような$f(x)$を求めよ。

$$-f(x)=x+\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

解）

1）fの不定積分をFとする。$F(t)=\int f(t)dt$

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt=\int_0^x (x-t)F'(t)dt=\left[(x-t)F(t)\right]_0^x+\int_0^x F(t)dt$$

$=-xF(x)+\int_0^x F(t)dt$　　故に，

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{d}{dx}\{-F(x)-xf(x)+F(x)\}$$

$$=\frac{d}{dx}\{-xf(x)\}=-f(x)-xf'(x)=-f(x)-xf'(x)$$

2）(*)　$-f(t)=t+\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$　を考える。

右辺第2項はたたみこみだから

(*)　$-f(t)=t+((t)*f)(t)$

両辺をラプラス変換して

(*)　$-F=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s^2}F$

$\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)F=-\dfrac{1}{s^2}$　　$\therefore$　$F=-\dfrac{1}{s^2+1}$　　逆ラプラス変換をして

$f=-\sin t$

1月13日

［１７］Ｈ１０長岡

訂正版

$f(x)$を連続関数とするとき以下の問いに答えよ。

（１）$\dfrac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt$を求めよ。

（２）つぎの等式が成り立つような$f(x)$を求めよ。

$$-f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

解）

1）$F(x)=\int_0^x f(t)dt$とおく，$F'(x)=f(x)\,\&\,F(0)=0$

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x (x-t)F'(t)dt = \big[(x-t)F(t)\big]_0^x + \int_0^x F(t)dt$$

$$= 0 + \int_0^x F(t)dt = \int_0^x F(t)dt \qquad \text{故に,}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^x F(t)dt = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

こいつもん

2）$(*)\quad -f(t) = t + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$　を考える。

右辺第２項はたたみこみだから

$(*)\quad -f(t) = t + ((t)*f)(t)$

両辺をラプラス変換して

$(*)\quad -F = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^2}F$

$\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)F = -\dfrac{1}{s^2}\qquad \therefore\quad F = -\dfrac{1}{s^2+1}$　　逆ラプラス変換をして

$f = -\sin t$，$f(x) = -\sin x$

128日

［１８］Ｈ１０長岡

自然数nの各位の数の和を$f(n)$とする。たとえば

$f(2053)=2+0+5+3=10$

である。次の各問いに答えよ。

（１）$\sum_{n=1}^{10} f(n)$を求めよ。

（２）$\sum_{n=1}^{100} f(n)$を求めよ。

（３）kを自然数とするとき$\sum_{n=1}^{10^k} f(n)$を求めよ。

解）

１）$f(0)=0$だから,

$$\sum_{n=1}^{10} f(n)=\sum_{n=0}^{9} f(n)+f(10)=\frac{(9+0)\cdot 10}{2}+1=45+1=46$$

２）$$\sum_{n=1}^{100} f(n)=\sum_{n=0}^{99} f(n)+f(100)=\frac{(0+9)10^2}{2}\cdot 2+1=901$$

３）$$\sum_{n=1}^{10^k} f(n)=\sum_{n=0}^{10^k-1} f(n)+f\left(10^k\right)=\frac{9\cdot 10^k}{2}\cdot \mathrm{k}+1$$

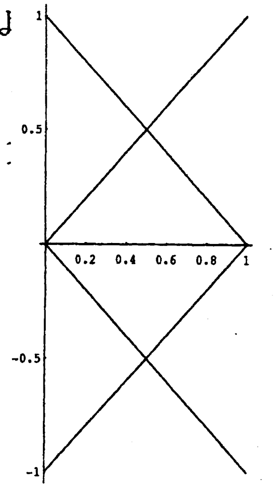
［１９］Ｈ１０長岡

（１） xy平面における領域$D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1\}$を図示せよ。

（２） （１）のDに対して重責分$\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy$を求めよ

解)

１）右図



２）$\Phi:\begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v) \\ y=\frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$の変換で$G=\{(u,v)\mid 0\le u\le 1, 0\le v\le 1\}$

DとGは１対１対応

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

だから

$$I=\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy=\iint_G ue^{v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 udu\right)\left(\int_0^1 e^v dv\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1}{4}(e-1)$$

$2x=u+v$

$2y=u-v$