11月7日

［1］Ｈ１０名工大

次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

解）
$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} x-a & a-b & b-c & 0 \\ 0 & x-b & b-c & 0 \\ 0 & 0 & x-c & 0 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-a & a-b & b-c \\ 0 & x-b & b-c \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)$$

[２] Ｈ１０名工大

ｉ）曲面　$x^2+y^2/4+z^2=1$　上の点　$\left(1/2,\sqrt{2},1/2\right)$　における接平面の方程式を求めよ。

ii）$\sin^2 x$　の　n次導関数を求めよ。

解）

ｉ）$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2/4+z^2$　とおくと　$grad(\varphi)=\nabla\varphi=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$

が接平面の法ベクトルになる。さて，

$grad(\varphi)=\left(2x,\dfrac{y}{2},2z\right)$　だから

点$A=\left(1/2,\sqrt{2},1/2\right)$　での法ベクトルは

$\mathbf{n}=\left(2\cdot\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},2\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$，$\mathbf{r}=(x,y,z)$に対し求める接平面は

$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{r}-\overrightarrow{OA}\right)=0$だから，$\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{2},y-\sqrt{2},z-\dfrac{1}{2}\right)=0$

$\therefore\quad x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\sqrt{2}\right)+z-\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore\quad x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y+z=2$

ii）　$y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$y'=\cancel{2}\sin 2x$　　両辺をn回微分して

$y^{(n+1)}=2^{n\cancel{+1}}\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$$y^{(n)}=\begin{cases}\cancel{2}\sin 2x & (n=1)\\ 2^{n-1}\sin\left(2x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right) & (2\le n)\end{cases}$$

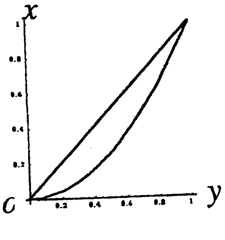
まとめて，$y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left(2x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)\quad(n=1,2,\cdots)$

11月7日

［３］Ｈ１０名工大

$D=\{(x,y);y^2\leq x\leq y\}$　として次の積分を求めよ。

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$



解）$I=\int_0^1\left\{\int_{y^2}^{y}(x^2+y^2)dx\right\}dy$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{y^2}^{y}+y^2\left[x\right]_{y^2}^{y}\right\}dy$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}(y^3-y^6)+y^2(y-y^2)\right\}dy$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{4}{3}y^3-y^4-\frac{1}{3}y^6\right\}dy$$

$$=\frac{1}{3}\left[y^4\right]_0^1-\frac{1}{5}\left[y^5\right]_0^1-\frac{1}{21}\left[y^7\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=\frac{3}{35}$$

ⅰ）行列　$A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$　の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

ⅱ）行列　$P^{-1}AP$　が対角行列となるような正則行列　P　を求めよ。

ⅲ）二つの関数　$x(t), y(t)$が次の微分方程式を満たすとする。

$$\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

このとき　$P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}$　とおくと　$\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}$　はどんな微分方程式を満たすか。

ⅳ）ⅲ）の　$X(t), Y(t)$　の微分方程式を解き　$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$　を求めよ。

解）

ⅰ）$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-5 & -8\\ -1 & t-3\end{vmatrix}=(t-5)(t-3)-8=(t-1)(t-7)$

$t=1, 7$；Aの固有値

$(tE-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}$　として固有ベクトルを求める。

$t=1$のとき，$\begin{pmatrix}-4 & -8\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$x+2y=0 \quad \therefore \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2y\\ y\end{pmatrix}=-y\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

$t=7$のとき，$\begin{pmatrix}2 & -8\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$x=4y \quad \therefore \mathbf{v}=\begin{pmatrix}4y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$

ⅱ）$P=(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$とおくと，

$$AP=A(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=(A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2)=(\mathbf{u}_1, 7\mathbf{u}_2)=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$　　　求めるPは$P=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$　注意；$|P|=6\neq 0$

ⅲ）$\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$　$\therefore$　$\begin{pmatrix}X'(t)\\ Y'(t)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$　だから

$$\begin{pmatrix}X'(t)\\ Y'(t)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X(t)\\ 7Y(t)\end{pmatrix}$$

$\because$）　ⅱ）より$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$　ゆえに　$P^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}P^{-1}$

11月7日

［4］Ｈ１０名工大

iv） $X(t)=X(0)e^{t} \qquad Y(t)=Y(0)e^{7t}$

$P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ だから

$$\begin{pmatrix}X(0)\\ Y(0)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$

以上より，$X(t)=-e^{t} \quad Y(t)=e^{7t}$。 次に

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^{t}\\ e^{7t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{t}+4e^{7t}\\ e^{t}+e^{7t}\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$