［４１］Ｈ１０京都工芸繊維大

（１）$\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ を求めよ．（２）$\displaystyle\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を求めよ．

解）

1）$\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{x^2}(1-\cos x)$

$f(x)=\cos x$ とおくと，マクローリン展開

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3$$

より，$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\sin(\theta x)}{6}x^3$ だから

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x^2}\left\{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{\sin(\theta x)}{6}x^3\right)\right\}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin(\theta x)}{6}x\right)=\frac{1}{2}\qquad\left(\because \frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\right)$$

2）$\displaystyle\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\displaystyle=\sin^{-1}x+\int\frac{1}{t}tdt\qquad\left(t=\sqrt{1-x^2},\ -xdx=tdt\right)$

$\displaystyle=\sin^{-1}x+\int dt$

$=\sin^{-1}x+t+c=\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$

［４２］Ｈ１０京都工芸繊維

$f(x,y)=x^3-3x^2+y^2$ の極値を求めよ．

解）

$f_x=3x^2-6x=3x(x-2)$，$f_y=2y$，$f_{xx}=6x-6$，$f_{xy}=0$，$f_{yy}=2$

$f_x=0, f_y=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0),(2,0)$

$\Delta^{(1)}=f_{xx}$ （または f_{yy}）

$\Delta^{(2)}=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2$

１）$\Delta^{(1)}>0, \Delta^{(2)}>0$ ならばそこで f は極小値

$\Delta^{(1)}<0, \Delta^{(2)}>0$ ならばそこで f は極大値

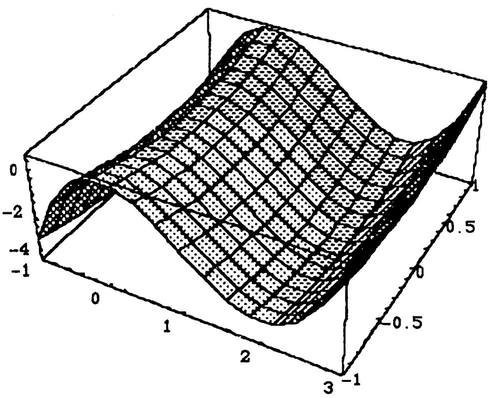
２）$\Delta^{(2)}<0$ ならばそこで f は極値でない

３）$\Delta^{(2)}=0$ ならばこのままでは判定できない．別の吟味を要する．

$(0,0)$ では $\Delta^{(2)}=(-6)2-0=-12<0$　f は極値でない

$(2,0)$ では $\Delta^{(2)}=6\cdot 2-0=12>0$，$f_{xx}=6>0$　そこで f は極小

$f(2,0)=2^3-3\cdot 2^2+0=-4$



［４３］Ｈ１０京都工芸繊維

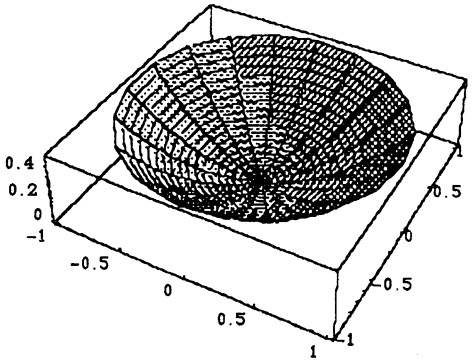
$\left\{(x,y,z): x^2+y^2 \le a^2, 0 \le z \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right\}$の体積$V$を求めよ.

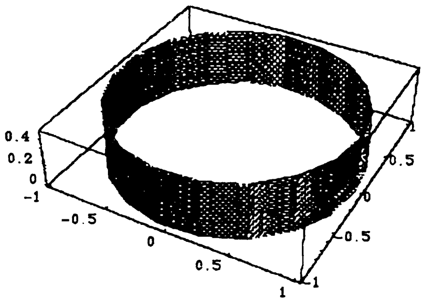
解）

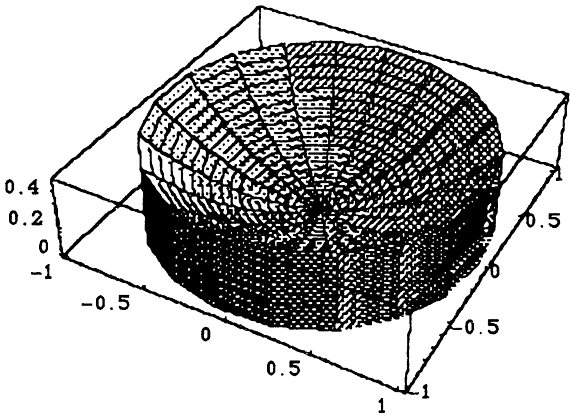
$$V=\iint_D \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)dxdy \qquad \text{ただし} \quad D=\left\{(x,y); x^2+y^2 \le a^2\right\}$$

極座標変換$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$dxdy=rdrd\theta$，$K=\left\{(r,\theta); 0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi\right\}$

として，$V=\frac{1}{2}\iint_K r^2 rdrd\theta=\frac{1}{2}2\pi\int_0^a r^3dr=\frac{\pi}{4}a^4$







月20日

［48］H10京都工芸繊維

$$(*)\begin{cases} x+y+z=3 \\ ax-y \quad =a-2 \\ 3x \ +2z=1 \\ x-y \quad =-3 \end{cases}$$

aは定数　(*)について

（1）$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 & a-2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$の行列式を求めよ.

（2）方程式(*)を解け.

解)

1）$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 & a-2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ a & a-1 & 0 & 4a-2 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\times 1$　$\times 3$

$=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ a-1 & 0 & 4a-2 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} \times(-2) \quad =-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ a-1 & 0 & 4a-2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$=-(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a-1 & 4a-2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a-1 & 4a-2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2(a-1)+4a-2$

$=2a$

2）1、3、4番の式より，$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+2z=1 \\ x-y=-3 \end{cases}$　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1$に注意して

$(x,y,z)=(-1,2,2)$

［４９］Ｈ１０京都工芸繊維

$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$が固有値1をもつような$a$の値を求めよ．またこのとき固有値及びその固有ベクトルを求めよ．

解）$|tE-A|=\begin{vmatrix} t-a & -1 & 0 \\ -1 & t-1 & 1 \\ 0 & -1 & t-2 \end{vmatrix}$に$t=1$を代入して０になるように$a$の値を決める．

$\begin{vmatrix} 1-a & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2-a$故に$a=2$　故に$(E-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}$より

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$x+y=0,-x+z=0,y+z=0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(x\neq 0)$

t=2も固有値である

[41] H10 京都工芸繊維大

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解) $\frac{0}{0}$の不定形より ロピタルを使うと

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}$$

まだ $\frac{0}{0}$ の不定形であるから ずっとロピタルを使うと

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^6 x}(2\cos^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x)-\cos x}{6}$$

$$\left[\begin{array}{lll} t=\cos x & \frac{dt}{dx}=-\sin x & \frac{dy}{dx}=2\frac{\sin x}{\cos^3 x} \\ y=t^{-2} & \frac{dy}{dt}=-2t^{-3} & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lll} t=\cos x & \frac{dt}{dx}=-\sin x & \frac{dy}{dx}=-3\sin x\cos^2 x \\ y=t^3 & \frac{dy}{dt}=3t^2 & \end{array}\right]$$

$$=\frac{\frac{2}{1}(2+0)-1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ //$$

別解) $\displaystyle\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x}{x^3}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\frac{1}{x^2}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}(1-\cos x)$

$x\to 0$で $\frac{\sin x}{x}\to 1$, $\frac{1}{\cos x}\to 1$,

ここで $f(x)=\cos x$ とおいて マクローリン展開すると

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\theta x)x^3 \quad (0\leqq\theta<1)$$

$$=\cos 0+(-\sin 0)x+\frac{1}{2!}(-\cos 0)x^2+\frac{1}{3!}(\sin\theta x)x^3$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\sin\theta x$$

これを代入すると

$$\frac{1}{x^2}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\left\{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\sin\theta x\right)\right\}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\sin\theta x\right)\xrightarrow[(x\to 0)]{}1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}$$ //

(2) $$\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\left[\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\right]\quad\left[t=1-x^2\quad \frac{dt}{dx}=-2x,\ dx=\frac{dt}{-2x}\right]$$

$$=\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{t}}\frac{dt}{-2x}=\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$=\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}}+C=\sin^{-1}x+\sqrt{t}+C$$

$$=\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$$ //

[42] H10 京都工芸繊維大

$f(x,y)=x^3-3x^2+y^2$ の 極値

$f(x,y)$ で $f_x=0$, $f_y=0$ で 極値を与える候補

$\Delta^{(1)}=f_{xx}$ or f_{xy} , $\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

$\Delta^{(2)}>0$ …… 極値を与える $\begin{cases} \Delta^{(1)}>0 \text{ …… 極小} \\ \Delta^{(1)}<0 \text{ …… 極大} \end{cases}$

$\Delta^{(2)}<0$ …… 極値を与えない saddle point

$\Delta^{(2)}=0$ …… 判別できない (要、別の情報)

$f_x=3x^2-6x=3x(x-2)$, $f_y=2y$

$f_x=0$ のとき $x=0,2$, $f_y=0$ のとき $y=0$

よって両方が0になるのは $(x,y)=(0,0),(2,0)$ のとき

$f_{xx}=6x-6=6(x-1)$, $f_{yy}=2$

$f_{xy}=f_{yx}=0$ より

$\Delta^{(1)}=f_{yy}=2>0$

$\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6(x-1) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=12(x-1)$

$(x,y)=(0,0)$ のとき $\Delta^{(2)}=12(0-1)=-12<0$ …… 極値なし

$(x, y) = (2, 0)$ のとき

$\Delta^{(2)} = 12(2-1) = 12 > 0$ …… 極値あり

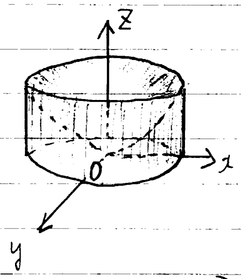
$\Delta^{(1)} > 0$ より 極小

$f(2,0) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 0^2 = 8 - 12 = -4$

$\therefore$ $(x, y) = (2, 0)$ で極小値 $f(2,0) = -4$ //

[43] H10 京都工芸繊維

$\{(x,y,z);\ x^2+y^2 \leqq a^2,\ 0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}(x^2+y^2)\}$ の体積 V



x-y 平面を極座標に変換する

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおくと $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$x^2+y^2 \leqq a^2 \to 0 \leqq r \leqq a$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

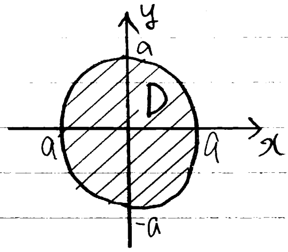
$0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \to 0 \leqq z \leqq \frac{r^2}{2}$

$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$

$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$

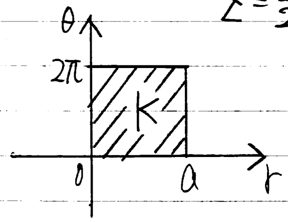
$dxdy = |J|drd\theta = rdrd\theta$

$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\longrightarrow$

$z = \frac{1}{2}r^2$



$$\iint_D z\,dxdy = \iint_K z\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}r^2 \cdot rdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 drd\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}a^4 d\theta = \frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^4}{8}(2\pi - 0) = \frac{\pi}{4}a^4$$

//

[48] H10 京都工芸繊維

$$(*)\begin{cases} x+y+z=3 \\ ax-y=a-2 \\ 3x+2z=1 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

(1)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 & a-2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 & a-2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \times(-2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 & a-2 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\cdot 1\begin{vmatrix} a & -1 & a-2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a-1 & 4a-2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\times 1$ $\times 3$

$$=(-1)^{3+1}\cdot 1\begin{vmatrix} a-1 & 4a-2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2(a-1)+(4a-2)$$

$$=-2a+2+4a-2=2a \,/\!/$$

(2) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+2z=1 \\ x-y=-3 \end{cases}$ でクラメルを使うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2-3+2=1$$

$$x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6-1+6 = -1$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \times 1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9-1+12 = 2$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$\times 1 \qquad \times(-3)$

$$\therefore (x, y, z) = (-1, 2, 2)$$

[49] H10 京都工芸繊維

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 固有値 1

$$|tE-A|=\begin{vmatrix} t-a & -1 & 0 \\ -1 & t-1 & 1 \\ 0 & -1 & t-2 \end{vmatrix}$$

固有値 $t=1$ をもつので $t=1$ を代入して $|tE-A|=0$ とすればよい

$$\begin{vmatrix} 1-a & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1-a = 2-a=0 \qquad \therefore a=2$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|tE-A|=\begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ -1 & t-1 & 1 \\ 0 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)^2+(t-2)-(t-2)=0$$

$$=(t-1)(t-2)^2=0$$

$t=1$ のとき $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$ $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

$\therefore x=z \ , \ -y=z$ $\qquad \therefore v=\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t=2$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$ $\begin{cases} y=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$

$$-x+z=0 \quad \therefore x=z$$

$$v=\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値 1 のときの固有ベクトル $v=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 2 のときの固有ベクトル $v=\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(α, β は 0 以外の任意定数)