月20日

[５０］Ｈ１０北海道

1．$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$について

（１）これを何というか

（２）$Q(x)=0$のとき何というか

（３）$Q(x)\neq 0$のとき何というか

（４）一般解を示せ。

解）

1）１階線形微分方程式

2）斉次線形微分方程式

3）非斉次線形微分方程式

4 3）$y=\exp\left(-\int P(x)dx\right)\left\{\int Q(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)dx+c\right\}$

$$=e^{-\int Pdx}\left\{\int Qe^{\int Pdx}dx+c\right\}$$

Ｈ１０北海道

2．$f(x,y)$は点$P(a,b)$においてC^{n+1}級である。

（１）テーラーの定理を述べよ。

（２）$P(0,0)$のときの式を書け。また，それを何というか。

（３）$n=0$のときの式を書け。

解）

1）$f(a+h,b+k)=\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{l}f(a,b)+R_{n+1}$

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a+\theta h,b+\theta k)\quad(0<\theta<1)$$

2）$f(h,k)=\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{l}f(0,0)+R_{n+1}$

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(\theta h,\theta k)\quad(0<\theta<1)$$

3）$f(a+h,b+k)=\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{l}f(a,b)+R_{n+1}$

で$n=1$とすると，

$$f(a+h,b+k)=\sum_{l=0}^{0}\frac{1}{l!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{l}f(a,b)+R_1$$

$$=f(a,b)+R_1$$

$$R_1=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta h,b+\theta k)$$

［５１］Ｈ１０北海道

複素数zについて

（１）$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$　であることを証明せよ。

（２）$|z_1+z_2|\ge|z_1|-|z_2|$　であることを証明せよ。

解）

１）$z_j=x_j+iy_j \quad x_j,y_j\in\mathbf{R} \quad (j=1,2)$とおける。

先ず,

$$
\begin{aligned}
&\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2\\
&=x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-x_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2-y_1^2y_2^2\\
&=\left(x_1y_2\right)^2-2\left(x_1y_2\right)\left(x_2y_1\right)+\left(x_2y_1\right)^2\\
&=\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2\ge0
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)\ge\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\ge\left|x_1x_2+y_1y_2\right|\ge x_1x_2+y_1y_2$$

$$\therefore\quad \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}-x_1x_2-y_1y_2\ge0\cdot\cdot\cdot\cdot(*)$$

さて,

$$
\begin{aligned}
&\left(|z_1|+|z_2|\right)^2-|z_1+z_2|^2\\
&=|z_1|^2+2|z_1|\cdot|z_2|+|z_2|^2-|z_1+z_2|^2\\
&=x_1^2+y_1^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}+x_2^2+y_2^2\\
&\quad -x_1^2-2x_1x_2-x_2^2-y_1^2-2y_1y_2-y_2^2\\
&=2\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}-x_1x_2-y_1y_2\right)\ge0 \qquad (\because(*))
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad |z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$　つまり，$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

２）（１）より

$$|z_1|=|z_1+z_2+(-z_2)|\le|z_1+z_2|+|-z_2|$$

$$\therefore\quad |z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2| \qquad (\because\quad |-z_2|=|z_2|)$$

3月2?

［５２］Ｈ１０北海道

曲線$y=f(x)$の$x=a$から$x=b$までの長さlは

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right)^2}\,dx$$ と表される。$(a<b)$

（１）これを示せ。

（２）半径rの円の円周を求めよ。

解）

1）この曲線上に$n+1$個の点$P_i\ (i=0,1,\cdots,n)$をとり，各点P_i の座標を(x_i,y_i)とし，

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\quad y_i=f(x_i)\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

とする。さて，$h_i=x_i-x_{i-1}>0$，$k_i=y_i-y_{i-1}\quad (i=1,2,\cdots,n)$とすれば

$$\overline{P_{i-1}P_i}=\sqrt{(h_i)^2+(k_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{k_i}{h_i}\right)^2}\,h_i$$

ところが，平均値の定理より $\exists c_i\ s.t.\ x_{i-1}<c_i<x_i\ \&.f'(c_i)=\dfrac{k_i}{h_i}$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^n\sqrt{1+\{f'(c_i)\}^2}\,h_i$$

分割を細かくすれば，$\max\limits_{1\le i\le n}\overline{P_{i-1}P_i}\to 0$で上式の左辺は長さ$l$に，右辺は

$\int_a^b \sqrt{1+\left(\dfrac{d\,f(x)}{d\,x}\right)^2}\,dx$に近づく，$\therefore l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\dfrac{d\,f(x)}{d\,x}\right)^2}\,dx$

2）$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$，$a=-r$，$b=r$として，

$$l=2\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=2\int_{-r}^r\sqrt{1+\left\{\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right\}^2}\,dx$$

$$=2\int_{-r}^r\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx=2r\int_{-r}^r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=4r\int_0^r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

$$=4r\left[\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_0^r=4r\{\sin^{-1}1-0\}=4r\frac{\pi}{2}=2\pi r$$

[50] H10 北海道

1. $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ について

(1) これは　1階線形微分方程式

(2) $Q(x)=0$ のとき　(1階)斉次線形微分方程式

(3) $Q(x)\neq 0$ のとき　(1階)非斉次線形微分方程式

(4) 一般解は　$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

2.

> 関数 $f(x,y)$ が点 $P(a,b)$ において C^n 級であるということは、関数 $f(x,y)$ が点 $P(a,b)$ で n 回微分可能で、連続であることを示す。

詳解 微積分演習II　p.3　§7 Taylor, Maclaurinの定理

(1) Taylorの定理

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_{n+1}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(a,b)+R_{n+1}$$

ただし　$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k)$　$(0<\theta<1)$

また $\dfrac{\partial}{\partial x}f(a,b)$ は $\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=a\\y=b}}$ の意味である。

(2) Maclaurinの定理

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(0,0)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)+R_{n+1}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(0,0)+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(\theta x,\theta y)\qquad(0<\theta<1)$$

(3) $n=0$のとき C^1級 → 1回微分可 よって

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+\theta h,b+\theta k)$$

$$=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+\theta h,b+\theta k)$$

$$(0<\theta<1)$$

[51] H10 北海道

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ とする　x, y は実数

(1) $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$

解) $|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2}$

$|z_1| + |z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$(|z_1 + z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2$

$= (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 - \{x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} + x_2^2 + y_2^2\}$

$= \cancel{x_1^2} + 2x_1x_2 + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_1^2} + 2y_1y_2 + \cancel{y_2^2} - \{\cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + 2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2}\}$

$= 2(x_1x_2 + y_1y_2) - 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$

$= 2\{x_1x_2 + y_1y_2 - \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\}$

$= 2\{\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2} - \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\}$ ——①

ここで $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 - (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

$= \cancel{x_1^2x_2^2} + \cancel{y_1^2y_2^2} + 2x_1x_2y_1y_2 - (\cancel{x_1^2x_2^2} + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + \cancel{y_1^2y_2^2})$

$= -(x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2) = -(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leqq 0$

∴ ①について

$\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2} - \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \leqq 0$

∴ $(|z_1+z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 \leqq 0$

$(|z_1+z_2|)^2 \leqq (|z_1| + |z_2|)^2$

$|z_1+z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ //

(2) $|z_1+z_2| \geqq |z_1|-|z_2|$

$|z_1| = |z_1+z_2-z_2|$ とおくと

$= |z_1+z_2+(-z_2)| \leqq |z_1+z_2| + |(-z_2)| = |z_1+z_2|+|z_2|$

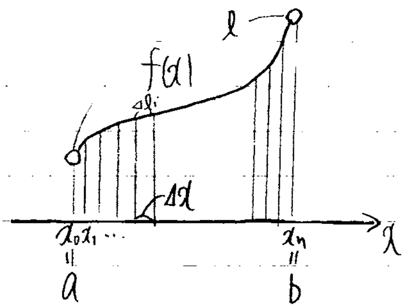
$\therefore\ |z_1|-|z_2| \leqq |z_1+z_2|$

[52] H10 北海道

$y=f(x)$ の $x=a\sim b$ までの長さ l は

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (a<b)$$

(1) 証明



x 軸 $[a,b]$ 上に $n+1$ 個の点をとり、その間隔 Δx とする。

x が x_i から x_{i+1} に変化したときの曲線の長さ Δl_i は

$$\Delta l_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}$$

ここで $x_{i+1}-x_i=\Delta x$ なので

$$\Delta l_i=\sqrt{(\Delta x)^2+(f(x_i+\Delta x)-f(x_i))^2}$$

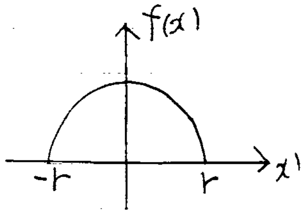
$$=\sqrt{1+\left(\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

ここで $n\to\infty$、つまり $\Delta x\to 0$ とすると右辺は微分となり、それを x は a から b まで積分することで長さ l が次のように得られる

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}\,dx$$

(2) 半径 r の円は $x^2+y^2=r^2$ $\therefore f(x)=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

このとき $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ とおいて l を求め 2倍する。



$$l = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

$$\left[\begin{array}{lll} f(x) = \sqrt{r^2-x^2} & \frac{df}{dx} = -2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \\ t = r^2-x^2 & \frac{dt}{dx} = -2x \\ f(x) = \sqrt{t} & \frac{df}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} \end{array}\right]$$

$$= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2r\int_{-r}^{r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$= 2r\left[\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r} = 2r\left(\sin^{-1}1-\sin^{-1}(-1)\right) = 2r\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 2\pi r_{/\!/}$$