1月16日

［２６］Ｈ１０府大

次の行列は対角化可能か？可能であれば対角行列を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}6 & -1 & -2\\ 4 & 1 & -2\\ 5 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

解）$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-6 & 1 & 2\\ -4 & t-1 & 2\\ -5 & 1 & t+1\end{vmatrix}$

$=(t-6)(t-1)(t+1)-10-8-2(t-6)+4(t+1)+10(t-1)$

$=(t-6)\left(t^2-1\right)-18-2t+12+4t+4+10t-10$

$=t^3-6t^2-t+6-18-2t+12+4t+4+10t-10$

$=t^3-6t^2+11t-6=(t-1)\left(t^2-5t+6\right)\quad\left(\because 1^3-6\cdot 1^2+11\cdot 1-6=0\right)$

$=(t-1)(t-2)(t-3)$

ゆえにAの固有値は$t=1,2,3$　$(tE-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}$より固有ベクトルを求める。

$t=1$のとき，$\begin{pmatrix}-5 & 1 & 2\\ -4 & 0 & 2\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，故に$\begin{cases}-5x+y+2z=0\\ -4x+2z=0\end{cases}$

$\therefore y=x, z=2x$，故に　$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\ x\\ 2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}(x\neq 0)$，$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

$t=2$のとき，$\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -4 & 1 & 2\\ -5 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，故に$\begin{cases}-4x+y+2z=0\\ -5x+y+3z=0\end{cases}$

$\therefore z=x, y=2x$，故に　$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\ 2x\\ x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}(x\neq 0)$，$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

$t=3$のとき，$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -4 & 2 & 2\\ -5 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，故に$\begin{cases}-3x+y+2z=0\\ -4x+2y+2z=0\\ -5x+y+4z=0\end{cases}$

$\therefore x=y=z$，故に　$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\ x\\ x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(x\neq 0)$，$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$P=\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\right)$とおくと$|P|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$，ゆえ$P$；正則行列，そして

-1

$AP=\left(A\mathbf{v}_1,A\mathbf{v}_2,A\mathbf{v}_3\right)=\left(1\mathbf{v}_1,2\mathbf{v}_2 3\mathbf{v}_3\right)=\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\right)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=P\,diag.(1,2,3)$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

［２７］Ｈ１０府大

ニュートンの冷却法則によれば，ある物質が動く空気中で冷却される速度は，その物質と空気の温度差に比例する。もし，空気の温度が$300K^\circ$で物質が１５分間で$370K^\circ$から$340K^\circ$に冷却されるならば，物質の温度が$310K^\circ$になるのは何分後か計算せよ。

解）

$T(t)$；t分後の物質の温度，k；比例定数，$c=300$　として

$T(t+\Delta t)=T(t)-k\{T(t)-c\}\Delta t$だから，$\dfrac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=-k\{T(t)-c\}$

つまり，$\dfrac{\Delta T}{\Delta t}=-k(T-c)$，$\Delta t\to 0$として，$\dfrac{dT}{dt}=-k(T-c)\cdots$（＊）

$\dfrac{1}{T-c}\dfrac{dT}{dt}=-k$　両辺を積分して$\displaystyle\int\frac{1}{T-c}\frac{dT}{dt}dt=-k\int dt$

$\displaystyle\int\frac{1}{T-c}dT=-kt$，$\log(T-c)=-kt+a$，$T-c=Ae^{-kt}\left(A=\pm e^{a}\right)$

$T=Ae^{-kt}+300$，$t=0,15$として，

$370=Ae^{0}+300=A+300$　故に$A=70$，$T=70e^{-kt}+300$

$340=70e^{-15k}+300$，$\dfrac{4}{7}=e^{-15k}$，$\log\left(\dfrac{4}{7}\right)=-15k$，$k=-\dfrac{1}{15}\log\dfrac{4}{7}$

$310=70e^{-kt}+300$，$kt=-\log\dfrac{1}{7}$，$\left(-\dfrac{1}{15}\log\dfrac{4}{7}\right)t=-\log\dfrac{1}{7}$

最初から，$t=\dfrac{15\log 7}{\log 7-\log 4}=52.158\cdots$分後

1月23日

［２８］Ｈ１０府大

留数を応用して次の定積分の値を求めよ。

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+2}d\theta$$

解）

$z=e^{i\theta}$ $(\theta;0\to 2\pi)$, $C;|z|=1$ とおくと, $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$dz=ie^{i\theta}d\theta$, $\therefore d\theta=\frac{1}{iz}dz$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+2}d\theta=\int_C\frac{1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+2}\frac{1}{iz}dz=\frac{2}{i}\int_C\frac{1}{z^2+4z+1}dz$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4z+1}=\frac{1}{\left\{z-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right\}\left(z+2+\sqrt{3}\right)}$$

$f(z)$ の C の中にある特異点は $z=-2+\sqrt{3}$ でそれは１位の極留数定理より

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),-2+\sqrt{3}\right]$$

$$=2\pi i\left[\left\{z-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right\}f(z)\right]_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\right]_{z=-2+\sqrt{3}}=2\pi i\frac{1}{-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}=2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+2}d\theta=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

[26] H10 府大

$$A=\begin{pmatrix}6&-1&-2\\4&1&-2\\5&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-6&1&2\\-4&t-1&2\\-5&1&t+1\end{vmatrix}=\underbrace{(t+1)(t-1)}_{(t^2-1)}(t-6)-10-8+10(t-1)+4(t+1)-2(t-6)$$

$$=t^3-6t^2-t+6-18+10t-10+4t+4-2t+12$$

$$\begin{array}{r|l} & t^2-5t+6 \\ \hline t-1 & t^3-6t^2+11t-6 \\ & t^3-t^2 \\ \hline & -5t^2+11t \\ & -5t^2+5t \\ \hline & -6t-6 \end{array}$$

$$=t^3-6t^2+11t-6=(t-1)(t^2-5t+6)=(t-1)(t-2)(t-3)=0$$

$\therefore\ t=1,2,3$ ：固有値

$t=1$ のとき

$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおいて $\begin{pmatrix}-5&1&2\\-4&0&2\\-5&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$

$$\begin{cases}-5x+y+2z=0\\-4x+2z=0\\-5x+y+2z=0\end{cases}\to z=2x \qquad \begin{array}{c}-5x+y+4x=0\\ \downarrow \\ y=x\end{array}$$

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \therefore\ \boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$t=2$ のとき

$$\begin{pmatrix}-4&1&2\\-4&1&2\\-5&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \qquad \begin{cases}-4x+y+2z=0\\-4x+y+2z=0 \quad \cdots\cdots ①\\-5x+y+3z=0 \quad \cdots\cdots ②\end{cases}$$

$$②-①=-x+z=0 \qquad \therefore\ x=z$$

$$-4x+y+2x=0 \qquad \therefore y=2x$$

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \therefore \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$t=3$のとき

$$\begin{pmatrix}-3&1&2\\-4&2&2\\-5&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \qquad \begin{cases}-3x+y+2z=0 & \cdots ①\\ -4x+2y+2z=0 & \cdots ②\\ -5x+y+4z=0 & \cdots ③\end{cases}$$

②−① $\quad -x+y=0 \qquad \therefore y=x$

③に代入 $\quad -5x+x+4z=0 \qquad \therefore z=x$

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \therefore \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$|P|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow\times(-1)\\ \leftarrow\times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0 \qquad \therefore P:\text{正則}$$

$$AP=(A\boldsymbol{v}_1,A\boldsymbol{v}_2,A\boldsymbol{v}_3)=(\boldsymbol{v}_1,2\boldsymbol{v}_2,3\boldsymbol{v}_3)=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} /\!/$$

[27] H10府大

時間t, 周りの温度v_0, 温度関数$v(t)$, 比例定数kとする

$$\frac{dv}{dt} = k(v(t) - v_0)$$

$$\frac{dv}{v(t)-v_0} = k\,dt$$

$$\log(v(t)-v_0) = kt + C_1$$

$$v(t) - v_0 = e^{kt+C_1} = C_2e^{kt}$$

$$v(t) = C_2e^{kt} + v_0 \qquad \therefore\ v(t) = C_2e^{kt} + 300$$

$$v(0) = C_2e^0 + 300 = 370 \qquad \therefore\ C_2 = 70$$

$$v(15) = 70e^{15k} + 300 = 340$$

$$70e^{15k} = 40 \qquad \therefore\ e^{15k} = \frac{4}{7} \qquad \therefore\ 15k = \log\frac{4}{7}$$

$$\therefore\ k = \frac{1}{15}\log\frac{4}{7}$$

$$\therefore\ v(t) = 300 + 70e^{(\frac{1}{15}\log\frac{4}{7})t}$$

$$e^{(\frac{1}{15}\log\frac{4}{7})t} = \frac{v(t)-300}{70}$$

$$\left(\frac{1}{15}\log\frac{4}{7}\right)t = \log\frac{v(t)-300}{70}$$

$$\therefore\ t = 15\,\frac{\log(v(t)-300) - \log 70}{\log 4 - \log 7}$$

$$t = 15\,\frac{\log(310-300)-\log 70}{\log 4 - \log 7} = 15\,\frac{\log 10 - \log 70}{\log 4 - \log 7}$$

$$= 15\,\frac{\cancel{\log 10} - \log 7 - \cancel{\log 10}}{\log 4 - \log 7} = \frac{15 \log 7}{\log 7 - \log 4}$$

$$= 52.158\ldots = 52分9秒5$$

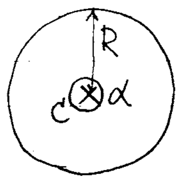
[28] H10 府大

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+2}\,d\theta$$

☆留数（複素関数）

○ローラン展開

$f(z)$は、αを中心とする半径Rの円の内部からαを除いた領域で正則とする。このとき、$f(z)$は$0<|z-\alpha|<R$において、αを中心とするローラン展開で表わされる。



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$$

ここで、係数a_nはαを中心とし半径がRより小さい円をCとするとき、次の積分で与えられる。

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n\text{は整数})$$

○ローラン展開の主要部

αは$f(z)$の孤立特異点とする。

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \qquad 0<|z-\alpha|<R \qquad (1)$$

ここで$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$とおくと$F(z)$は$\alpha$を中心とするべき級数であるから、$F(\alpha)=a_0$と定めると$\alpha$で正則であり、(1)は次のように書くことができる。

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}+F(z)$$

$$=\cdots\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}+\cdots\cdots+\frac{a_{-1}}{z-\alpha}+F(z) \qquad (2)$$

(2)で$F(z)$を除いた部分をローラン展開の主要部という。

主要部がない場合は、$f(z)=F(z)$となるから$f(z)$はαで正則である。このとき、αを$f(z)$の除去可能な特異点という。

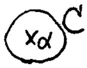
主要部が有限個の0でない項よりなる場合、すなわち

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k}+\cdots\cdots+\frac{a_{-1}}{z-\alpha}+F(z) \qquad (a_{-k}\neq 0)$$

のときαを$f(z)$のk位の極という。

主要部が無限個の項よりなる場合、αを$f(z)$の真性特異点という。

◦留数



点αを内部に含む単一閉曲線Cをとる。$f(z)$はCおよびCの内部において、点αを除いて正則とする。(2)の両辺のCに沿う積分を求めると

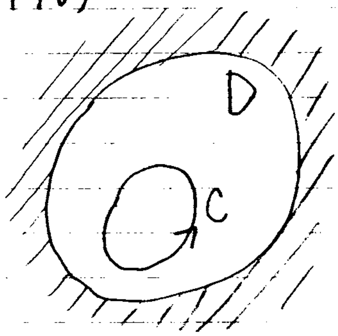
$$\int_C f(z)\,dz=\cdots\cdots+a_{-n}\int_C\frac{dz}{(z-\alpha)^n}+\cdots\cdots+a_{-1}\int_C\frac{dz}{(z-\alpha)}+\int_C F(z)\,dz \qquad (3)$$

Cの方程式を $z=\alpha+re^{i\theta}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ とすると

$$\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^n}=\begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n\text{は2以上の整数}) \end{cases}$$

である。又 コーシーの積分定理 は

関数 $f(z)$ は領域Dで正則で、D内の単一閉曲線Cで囲まれた部分がDに含まれるとする。このとき



$$\int_C f(z)\,dz=0$$

が成り立つ。

よって(3)は
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz=a_{-1} \qquad (4)$$

(4)の左辺の積分の値はCの選び方に無関係である。

この値を点αにおける$f(z)$の留数といい、$\mathrm{Res}[f,\alpha]$と書く。

$$\mathrm{Res}[f,\alpha]=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

すなわち留数はローラン展開における $\frac{1}{z-\alpha}$ の係数に等しい。

また定義から次の等式が成り立つ。

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f,\alpha]$$

○留数の計算

点αが$f(z)$の1位の極であるとき

$$\mathrm{Res}[f,\alpha] = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

点αが$f(z)$のk位$(k\geqq 2)$の極であるとき

$$\mathrm{Res}[f,\alpha] = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-\alpha)^k f(z)\}$$

○留数定理

単一閉曲線Cの内部にある特異点$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$を除き、Cの周及び内部で正則ならば

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}[f,\alpha_1]+\mathrm{Res}[f,\alpha_2]+\cdots+\mathrm{Res}[f,\alpha_n]\right)$$

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+2}\,d\theta$$

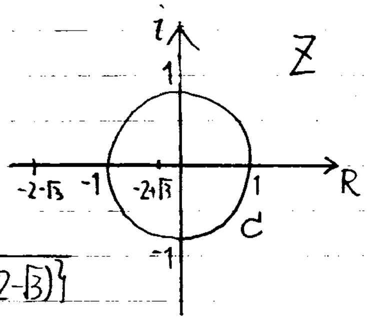
$z=e^{i\theta}$，$|z|=1$とおくと　$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$$

$$I = \int_C \frac{1}{\frac{z+z^{-1}}{2}+2}\,\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_C\frac{dz}{z^2+4z+1} \qquad \left[z=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2} = -2\pm\sqrt{3}\right]$$

$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_C\frac{dz}{z^2+4z+1} = \int_C\frac{dz}{\{z-(-2-\sqrt{3})\}\{z-(-2+\sqrt{3})\}}$　とおくと

C内の孤立特異点は $z=-2+\sqrt{3}$



$$\int_C f(z) = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f, -2+\sqrt{3}]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \cancel{\{z-(-2+\sqrt{3})\}} \frac{1}{\cancel{\{z-(-2+\sqrt{3})\}}\{z-(-2-\sqrt{3})\}}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{1}{z+2+\sqrt{3}} = 2\pi i \frac{1}{-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}} = \frac{2\pi i}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore I = \frac{2}{i}\int_C f(z)dz = \frac{2}{i}\frac{\pi i}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad //$$