［２９］Ｈ１０千葉

（１）　次の等式を証明せよ。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし，nは自然数とする。

（２）　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

解）

１）$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$だから，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^3-k^3\right\}=\sum_{k=2}^{n}k^3+(n+1)^3-\left\{1+\sum_{k=2}^{n}k^3\right\}=(n+1)^3-1$，また

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^3-k^3\right\}=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n$，故に

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-\frac{3n(n+1)}{2}-n=(n+1)\left\{(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\left\{2(n+1)^2-3n-2\right\}=\frac{1}{2}(n+1)\left(2n^2+n\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\qquad\therefore\quad\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

２）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle=\frac{n(n+1)}{6}\{(2n+1)+3\}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$だから

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}$$

故に　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}$

参考；$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(\frac{k+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$$

$$=\int_0^1 x^2dx+0\times\int_0^1 xdx=\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

1月23日

［３０］Ｈ１０千葉　　　　　　　　　　　　　　　　　その１

（１）下記に与えられた行列Aに対して，行および列に関する基本変形を何回か施すことによって，次の標準形Iに変形されることを示せ。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -4 & 7\\ -1 & -2 & -1 & -2\end{pmatrix}\qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（２）（１）と関連して，次の関係式：$PAQ=I$が成り立つような正則３次正方行列Pと正則４次正方行列Qを求めよ。

解）

1）$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -4 & 7\\ -1 & -2 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \times(-2)\\ \times 1\end{array}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

$\times(-2)\quad \times 1\quad \times(-3)$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \times(-1)\end{array}\longrightarrow$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\times 1$

[３０] Ｈ１１千葉

その２

２）変形１は$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$を左から，変形２は$Q_1=\begin{pmatrix}1&-2&1&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$を

右から，変形３は$Q_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$を右から，変形３は

$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$を変形４は$Q_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$を右からかける。

$P=P_2P_1$，$Q=Q_1Q_2Q_3$である$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

1月23日

[31] H10千葉

次の積分を求めよ。

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

解)

極座標変換を行う $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ このときヤコビアン J は

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

$D=\{(x,y);-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty\}$, $K=\{(r,\theta);0<r<\infty,0\le\theta<2\pi\}$

として,

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_K e^{-r^2}|J|drd\theta$$

$$=\iint_K e^{-r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr\right\}d\theta=2\pi\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr$$

$$=-\pi\int_0^{\infty}(-2r)e^{-r^2}dr=-\pi\left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty}=-\pi(0-1)=\pi\left(\because\frac{d}{dr}\left(e^{-r^2}\right)=-2re^{-r^2}\right)$$

［３２］Ｈ１０千葉

次の扇形微分方程式の解 $y=y(x)$ を求めよ。

$$\frac{d}{dx}y(x)+2y(x)=x, \quad y(0)=1$$

解） $w=e^{2x}y$ とおくと， $w'=2e^{2x}y+e^{2x}y'=e^{2x}(y'+2y)=e^{2x}x$， $w(0)=1$

$$w=\int e^{2x}xdx=\frac{1}{2}e^{2x}x-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}x-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+c=e^{2x}\left\{\frac{1}{4}(2x-1)+ce^{-2x}\right\}$$

$\therefore \quad y=\frac{1}{4}(2x-1)+ce^{-2x} \qquad y(0)=1$ より $c=\frac{5}{4}$， $y=\frac{1}{4}(2x-1)+\frac{5}{4}e^{-2x}$

参； $y'+py=q \Rightarrow y=e^{-\int pdx}\left[\int qe^{\int pdx}dx+C\right]$ より

$$y=e^{-\int 2dx}\left[\int xe^{\int 2dx}dx+C\right]=e^{-2x}\left[\int xe^{2x}dx+C\right]$$

$$=e^{-2x}\left[\frac{1}{2}\left(e^{2x}x-\int e^{2x}dx\right)+C\right]=e^{-2x}\left[\frac{1}{2}\left(e^{2x}x-\frac{1}{2}e^{2x}\right)+C\right]$$

$$=e^{-2x}\left[\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C\right]=\frac{1}{4}(2x-1)+Ce^{-2x}$$ 以下同様

[29] H10 千葉

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\because)$ $(k+1)^3-k^3=k^3+3k^2+3k+1-k^3=3k^2+3k+1$

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=2}^{n+1}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=(n+1)^3+\sum_{k=2}^{n}k^3-1-\sum_{k=2}^{n}k^3=(n+1)^3-1=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$$

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\{2(n+1)^3-2(n+1)-3n(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{2(n+1)^2-3(n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\left[\{2(n+1)-1\}\{(n+1)-1\}\right]$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n+2-1)n$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad //$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{3\cancel{n}(n+1)+\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6n^{\cancel{3}2}}=\frac{(n+1)(3+2n+1)}{6n^2}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{4}{n}\right)}{6} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}$$

[30] H10 千葉

(1)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&-4&7\\-1&-2&-1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-2)\\ \times 1\end{matrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-2&1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{array}{cccc}\times(-2)&\times1&\times(-3)&\\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\times 2\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ //

(2) $PAQ=I$

Aの1行目を3行目にx掛けて足すときの操作は

$$PA=A'$$

として、

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$$ となる

Aの2行目を1行目にx掛けて足すときは

$$P=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Aの1行目と2行目を入れ替えるときは

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

となる。

Aの1列目を3列目にy掛けて足すときの操作は

$$AQ = A'$$

として $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

Aの2列目を3列目にyに掛けて足すときは

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aの1列目と2列目を入れ替えるには

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって (1)の行の操作と列の操作より

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = P_2P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No. 74 Date

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} //$$

[31] H10 千葉

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$ とおくと $x^2+y^2=r^2$

変数変換のときのヤコビアン行列 J は

$$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

$$\begin{matrix} x:-\infty\sim\infty \\ y:-\infty\sim\infty \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} r:0\sim\infty \\ \theta:0\sim 2\pi \end{matrix}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}|J|\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$\left[t=-r^2,\ \frac{dt}{dr}=-2r,\ dr=-\frac{dt}{2r},\ r:0\sim\infty,\ t:0\sim-\infty\right]$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{-\infty} re^{t}\frac{dt}{-2r}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t}\,dt\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[e^t\right]_{-\infty}^{0}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1\,d\theta=\frac{2\pi}{2}=\pi$$ //

[32] H10 千葉

$$\frac{d}{dx}y(x)+2y(x)=x \quad , \quad y(0)=1$$

$y'' + P(x)y = Q(x)$ のとき

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + C\right)$$

$P(x)=2$, $Q(x)=x$

$$\therefore\ y = e^{-\int 2dx}\left(\int x e^{\int 2dx} dx + C\right)$$

$$= e^{-2x}\left(\int x e^{2x} dx + C\right) = e^{-2x}\left(\int x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx + C\right)$$

$$= e^{-2x}\left(\left[\frac{1}{2}x e^{2x}\right] - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2x}\left(x e^{2x} - \int e^{2x} dx + C\right) = \frac{1}{2}e^{-2x}\left(x e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$$

$$y(0) = -\frac{1}{4} + C = 1 \qquad \therefore C = \frac{5}{4}$$

$$\therefore\ y(x) = \frac{1}{4}(2x-1) + \frac{5}{4}e^{-2x} \ /\!/$$