3月27日

[５６] Ｈ９大阪（基礎工）

線形微分方程式

（＊） $y'' - 2y' + 5y = e^x + xe^x$

（１） $y'' - 2y' + 5y = 0$の一般解を求めよ。

（２） $y'' - 2y' + 5y = e^x$を満たす特殊解を求めよ。

（３） $y'' - 2y' + 5y = xe^x$を満たす特殊解を求めよ。

（４） （＊）の一般解を求めよ。

（５） $y(0) = a,\quad y'(0) = b$のとき（＊）の解を求めよ。

解）

（１） 特性方程式は　$t^2 - 2t + 5 = 0$　でその解は$t = 1 \pm 2i$

だから，$y'' - 2y' + 5y = 0$の一般解は$y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right)$

（２） $y := Ae^x$を$y'' - 2y' + 5y = e^x$に代入$(A - 2A + 5A)e^x = e^x$

ゆえに$A = \dfrac{1}{4}$　求める特殊解は$y = \dfrac{1}{4}e^x$

（３） $y := p(x)e^x$を$y'' - 2y' + 5y = xe^x$に代入$y'' = \left(p'' + 2p' + p\right)e^x$

$y' = \left(p' + p\right)e^x$だから

$\left(p'' + 2p' + p - 2p' - 2p + 5p\right)e^x = xe^x$

$\therefore\quad p'' + 4p = x \quad p := ax^3 + bx^2 + cx + d$を代入して　$p = \dfrac{1}{4}x$

求める特殊解は$y = \dfrac{1}{4}xe^x$

（５） ［（＊）の一般解］＝［$y'' - 2y' + 5y = 0$の一般解］＋［（＊）の特殊解］

（２），（３）より（＊）の特殊解は$y = \dfrac{1}{4}(1 + x)e^x$　これと（１）

より$y = \left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}x\right)e^x \cdots ①$

（６） $y' = \left\{\left(c_1 + 2c_2\right)\cos 2x + \left(c_2 - 2c_1\right)\sin 2x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}x\right\}e^x \cdots ②$

$a = y(0) = c_1 + \dfrac{1}{4} \quad b = y'(0) = c_1 + 2c_2 + \dfrac{1}{2}$

故に，$c_1 = a - \dfrac{1}{4}$，$c_2 = \dfrac{1}{2}(b - a) - \dfrac{1}{8}$以上を①に代入して

$$y = \left\{\left(a - \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}(b - a) - \frac{1}{8}\right)\sin 2x + \frac{1}{4}(1 + x)\right\}e^x$$

［５７］Ｈ９　大阪（基礎工）
場合の数と確率の問題
（１）正六角形の頂点の三つを結んでできる三角形で，六角形と辺を共有しないもの（対角線のみで結ばれる）はいくつあるか。
（２）一般に正ｎ角形（ｎは６以上）の三つの頂点を結んでできる三角形で，ｎ角形と辺を共有しないものはいくつあるか。
（３）（２）で答えた三角形の数が，それ以外（辺を共有するもの）の三角形の数より大きくなるのはｎがいくつ以上のときか。
（４）１からｎまでの整数を書いたカードを，引いたカードを戻さずに３枚引く。それぞれのカードの差が２以上ある確率を求めよ。
解）
（１）頂点を$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$とする三角形は全部で${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$個が考えられる。そのうち六角形と二辺を共有するのは
$\Delta A_1A_2A_3$，$\Delta A_2A_3A_4$，$\Delta A_3A_4A_5$，$\Delta A_4A_5A_6$，$\Delta A_5A_6A_1$，$\Delta A_6A_1A_2$　の６個が考えられる。一辺のみを共有するのはたとえばA_1A_2の場合第三頂点はA_1，A_2とその両隣の二点A_6，A_3を除いたA_4, A_5が考えられる。従ってA_1A_2の一辺のみを共有する三角形は２個全部で$2\times6=12$個がある。以上より，求める三角形は$20-6-12=2$個。
（２）（１）と同様に考えて，二辺を共有するのはｎ個，一辺のみを共有するのは$n(n-4)$個，以上より辺を共有しない三角形は
$${}_nC_3-n-n(n-4)=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}-n(n-3)=\frac{n}{6}(n-4)(n-5)$$
（３）$n+n(n-4)=n(n-3)$；１または２辺を共有する三角形
$\dfrac{n}{6}(n-4)(n-5)>n(n-3)$　故に，$n^2-9n+20>6n-18$
$n^2-15n+38>0$　$6\le n$だから　$12\le n$
（４）（１）～（３）より$\dfrac{n}{6}(n-4)(n-5)$
$$\text{求める確率}Pは P=\frac{\frac{n}{6}(n-4)(n-5)}{{}_nC_3}=\frac{n(n-4)(n-5)}{6\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$
$$=\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}$$

4月3日

[58] H9　大阪(基礎工)

平面図形

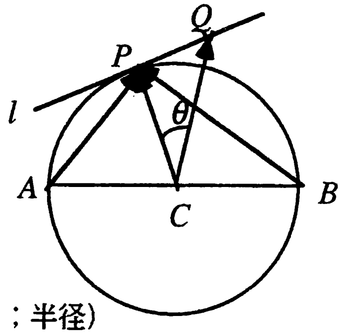
点A, Bを直径とする円があり，ABの中点をC（円の中心）とし，円上の任意の点をPとする。またPを通る円の接線lの任意の点をQとする。また，それぞれの位置ベクトルを$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{q}$とする。

（1）$\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)=0$　を証明せよ。

（2）$\left(\vec{p}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{q}-\vec{c}\right)=R^2$　を証明せよ。

（3）点Aを$(2,4)$，点Bを$(4,2)$とし，接線lが原点を通るとき，接点Pを求めよ。

解)



（1）直径の上に立つ円周角は直角

故に，$\angle APB=\angle R$，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$

$\overrightarrow{AP}=\mathrm{p}-\mathrm{a}$，$\overrightarrow{BP}=\mathrm{p}-\mathrm{b}$

$(\mathrm{p}-\mathrm{a})\cdot(\mathrm{p}-\mathrm{b})=0$

（2）$\angle CPQ=\angle R$だから$\theta:=\angle PCQ$として

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CQ}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CP}\right|=R^2$（$R$；半径）

（3）A，Bの中点$C(3,3)$が中心半径$R=\sqrt{2}$　求める円は

$(x-3)^2+(y-3)^2=2$　接点$P(x_0,y_0)$とすると接戦lは

$(x_0-3)(x-3)+(y_0-3)(y-3)=2$　これが$(0,0)$を通るから

$-3\{(x_0-3)+(y_0-3)\}=2\ \&\ (x_0-3)^2+(y_0-3)^2=2$

$X_0+Y_0=-\dfrac{2}{3}$　　$X_0^2+Y_0^2=2$　但し，$X_0=x_0-3$，$Y_0=y_0-3$

$2X_0^2+\dfrac{4}{3}X_0-\dfrac{14}{9}=0$　　$9X_0^2+6X_0-7=0$

$X_0=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+63}}{9}=\dfrac{-3\pm6\sqrt{2}}{9}=\dfrac{-1\pm2\sqrt{2}}{3}$,

$Y_0=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{-1\pm2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{-1\mp2\sqrt{2}}{3}$

以上より $x_0=X_0+3=\dfrac{-1\pm2\sqrt{2}}{3}+3=\dfrac{8\pm2\sqrt{2}}{3}$

$y_0=Y_0+3=\dfrac{-1\mp2\sqrt{2}}{3}+3=\dfrac{8\mp2\sqrt{2}}{3}$

[56] H9 大阪 (基礎I)

(*) $y''-2y'+5y=e^x+xe^x$

(1) $y''-2y'+5y=0$ の一般解

特性方程式 $t^2-2t+5=0$

$t=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm 2i$

一般解 $y=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

(2) $y''-2y'+5y=e^x$ の特殊解

解を $y=ae^x$ と予想 $y'=ae^x$, $y''=ae^x$

$ae^x-2ae^x+5ae^x=e^x$

$4ae^x=e^x$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore y=\frac{1}{4}e^x$

(3) $y''-2y'+5y=xe^x$ の特殊解

解を $y=e^x(ax+b)$ と予想

$y'=e^x(ax+b)+ae^x=e^x(ax+a+b)$

$y''=e^x(ax+a+b)+ae^x=e^x(ax+2a+b)$

$e^x(ax+2a+b)-2e^x(ax+a+b)+5e^x(ax+b)=xe^x$

$(a-2a+5a)x+\cancel{2a}+b-\cancel{2a}-2b+5b=x$

$4ax+4b=x+0$

$\therefore a = \frac{1}{4}, \quad b = 0$

$y = \frac{1}{4} x e^{x}$

(4) (*)の一般解

[(*)の一般解] = [(1)] + [(2)] + [(3)]

$\therefore \quad y = e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}xe^{x}$

$= e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x)$

(5) $y(0) = a$, $y'(0) = b$ のとき

(4)の y について

$y(0) = e^{0}(A + \frac{1}{4}) = A + \frac{1}{4} = a \qquad \therefore A = a - \frac{1}{4}$

$y' = \underbrace{e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x)}_{y}$

$+ e^{x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \frac{1}{4})$

$= y + e^{x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \frac{1}{4})$

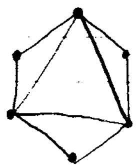
$y'(0) = y(0) + e^{0}(2B + \frac{1}{4}) = a + 2B + \frac{1}{4} = b$

$\therefore B = \frac{1}{2}(b - a - \frac{1}{4})$

$\therefore y = e^{x}\left\{(a - \frac{1}{4})\cos 2x + \frac{1}{2}(b - a - \frac{1}{4})\sin 2x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right\}$

[57] H9 大阪(基礎工)

(1) 全ての三角形は6つの頂点から3つを選ぶので



$_6C_3$ 個

このうち正6角形と2辺を共有するのは、隣り合う2辺の組み合わせなので6通り。

また一辺を共有するのは各辺と、その他その辺と隣り合わない頂点は $6-2-2=2$ つ。∴ 6×2 通り。

よって、一つも辺を共有しない三角形は

$$_6C_3-(6+6\times2)=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}-(6+12)$$

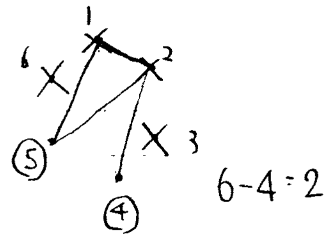
$$=20-18=2$$

∴ 2通り//

(2) (1)より全ての三角形は $_nC_3$ 個。

2辺を共有するのは n 個。

1辺を共有するのは $n(n-4)$ 個



$$\therefore\ _nC_3-n-n(n-4)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}-n(1+n-4)$$

$$=\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-6n(n-3)\}=\frac{1}{6}n\{(n-1)(n-2)-6(n-3)\}$$

$$=\frac{n}{6}\{n^2-3n+2-6n+18\}=\frac{n}{6}\{n^2-9n+\underset{-4\ -5}{20}\}$$

$$=\frac{n}{6}(n-4)(n-5)$$ //

(3) それ → $\frac{n}{6}(n-4)(n-5)$

それ以外 → $n+n(n-4)=n(n-3)$

$$\frac{n}{6}(n-4)(n-5)>n(n-3)$$

を満たす最小の n を求める。$n\geq 6$ の整数として

$$\frac{\cancel{n}}{6}(n-4)(n-5)>\cancel{n}(n-3)$$

$$(n-4)(n-5)>6(n-3)$$

$$n^2-9n+20>6n-18$$

$$n^2-15n+38>0$$

$$\left[\ n=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 38}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{73}}{2}\ \right]$$

$225-152=73$　$38\times 4=152$

$$\left(n-\frac{15+\sqrt{73}}{2}\right)\left(n-\frac{15-\sqrt{73}}{2}\right)>0$$

よって $n>\frac{15+\sqrt{73}}{2}$ 又は $n<\frac{15-\sqrt{73}}{2}$

n は6以上の整数なので

$1.4142\times 3=4.2426$

$$\frac{15+\sqrt{73}}{2}\fallingdotseq\frac{15+\sqrt{72}}{2}=\frac{15+6\sqrt{2}}{2}=7.5+3\sqrt{2}$$

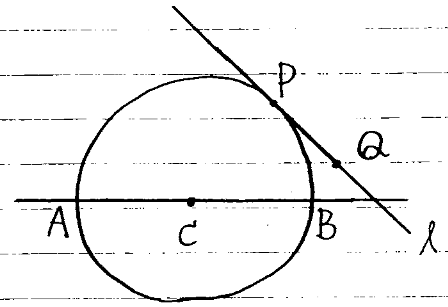
$$=7.5+4.24\cdots\fallingdotseq 11.74\cdots$$

$$\therefore\ n\geq 12$$ //

(4) 全てのカードの差が2以上 → 隣り合う数のカードを引かない
→ 正n角形と辺を共有しない三角形の頂点の組み合わせと
同じ。

$$\therefore P = \frac{\frac{n}{6}(n-4)(n-5)}{{}_nC_3} = \frac{\cancel{n}(n-4)(n-5)}{\cancel{6}\,\frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)}{\cancel{3!}}} = \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}$$

[58] H9 大阪(基礎工)



(1) 円周角の定理より△APBについて外接円の直径が斜辺ABのとき∠APBは直角になるので、

$\vec{p}-\vec{a}$ と $\vec{p}-\vec{b}$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$

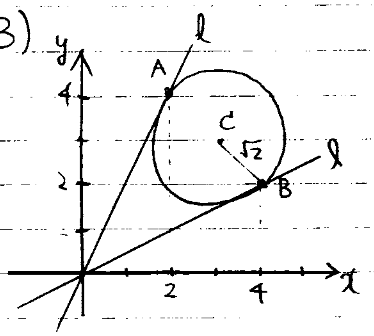
$\therefore\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

(2) △CPQについて、△CPQは∠CPQが直角であるから

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{q}-\vec{c})=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$$
$$=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CQ}|\cos\angle PCQ$$
$$=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CP}|$$
$$=R\cdot R=R^2$$

但しRは半径

(3)



中心 C(3,3) 半径 $\sqrt{2}$

$(x-3)^2+(y-3)^2=2$

このとき

$X=x-3$

$Y=y-3$

とおくと

円の接線の方程式 (▷高専の数学1 P187 [15,2]

円 $x^2+y^2=r^2$

上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$x_0 x + y_0 y = r^2$

円の方程式は $X^2+Y^2=2$ —(*)

接線の方程式は $X_0X+Y_0Y=2$

原点 $(x,y)=(0,0)$ つまり $(X,Y)=(x-3,y-3)=(-3,-3)$ を通るので

$$-3X_0-3Y_0=2$$

$$X_0+Y_0=-\frac{2}{3}$$

$$Y_0=-\frac{2}{3}-X_0$$

これは(*)も満たすので X,Y に X_0,Y_0 を代入して

$$X_0^2+Y_0^2=2$$

$$X_0^2+\left(-\frac{2}{3}-X_0\right)^2=X_0^2+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}X_0+X_0^2$$

$$=2X_0^2+\frac{4}{3}X_0+\frac{4}{9}=2$$

$$2X_0^2+\frac{4}{3}X_0-\frac{14}{9}=0$$

$$9X_0^2+6X_0-7=0$$

$$X_0=\frac{-3\pm\sqrt{9+9\times 7}}{9}=\frac{-1\pm\sqrt{8}}{3}=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}}{3}$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836B 6 mm ruled×36 lines

$$Y_0 = -\frac{2}{3} - X_0 = -\frac{2}{3} - \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{3} = \frac{-1 \mp 2\sqrt{2}}{3}$$

$$x_0 = X_0 + 3 = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{3} + 3 = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{3}$$

$$y_0 = Y_0 + 3 = \frac{-1 \mp 2\sqrt{2}}{3} + 3 = \frac{8 \mp 2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \; P(x, y) = \left(\frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{3}, \frac{8 \mp 2\sqrt{2}}{3} \right)$$