[５９] Ｈ８大坂（基礎工）

区間$I=[-\pi,\pi]$で連続な関数$f(x)$に対して

$$R(k)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\ (k=0,1,2,\cdots),$$

とするとき次の問いに答えよ。

(1) $|\alpha|<1$なる実数αに対して　$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\cos jx$　としたとき

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}R(k)$　を求めよ。

(2) 関数$f(x)$がIで非負であるとき

$|R(k)|\le R(0)$,　$k=0,1,2,\cdots$,　が成り立つことを示せ。

解）

(1) $f(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\cos jx$：偶関数　に注意して

$$R(k)=2\int_0^{\pi}f(x)dx=2\int_0^{\pi}\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\cos jx\right)\cos kx dx=\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\int_0^{\pi}2\cos jx\cos kx dx$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\int_0^{\pi}\{\cos(j+k)x+\cos(j-k)x\}dx$$

$$(k=0)=\sum_{j=0}^{n}\alpha^j 2\int_0^{\pi}\cos jx dx=\alpha^0 2\int_0^{\pi}dx+\sum_{j=1}^{n}2\alpha^j\int_0^{\pi}\cos jx dx=2\pi+2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}[\sin jx]_0^{\pi}$$

$$=2\pi\quad\left(\because\ [\sin jx]_0^{\pi}=0\right)$$

$$(1\le k)=\sum_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{n}\alpha^j\left\{\frac{1}{j+k}[\sin(j+k)x]_0^{\pi}+\frac{1}{j-k}[\sin(j-k)x]_0^{\pi}\right\}+\alpha^k\int_0^{\pi}(\cos 2kx+1)dx$$

$$=\alpha^k\left\{\frac{1}{2k}[\sin 2kx]_0^{\pi}+[x]_0^{\pi}\right\}\quad(\because\sin l\pi=0, l=0,1,2,3,\cdots)$$

$$=\pi\alpha^k$$

$$\sum_{k=0}^{n}R(k)=\pi\left\{1+\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\right\}=\pi\left\{1+\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right\}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\pi\left(1+\frac{1}{1-\alpha}\right)=\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\pi$$

(2) $f(x)=|f(x)|$　に注意して

$$|R(k)|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx\right|\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\cos kx|dx\qquad\left(\because\ \left|\int_a^b g(x)dx\right|\le\int_a^b|g(x)|dx\right)$$

$$\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx\quad(\because|\cos kx|\le 1)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 0x dx\quad\left(\because\ |f(x)|=f(x), 1=\cos 0x\right)$$

$$=R(0)\qquad k=0,1,2,3,\cdots$$

4339

[60] H8大坂（基礎工）

2つの3次元空間ベクトル $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$

に対して、外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は次のように定義される。

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

ただし、$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ は空間の基本ベクトル（大きさ1、互いに垂直）を、また $|\quad|$ は行列式を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ 及び $\vec{b}$ と垂直になることを証明せよ。

(2) 外積について、$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$ という交換の法則が成り立つかどうか確かめよ。また、成立しない場合は、$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ。

(3) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}/\!/\vec{b}$ を証明せよ。

(4) 3つの空間ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で定まる平行六面体の体積は $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ の絶対値で与えられることを証明せよ。

解)

(1) 内積を計算

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot a_1-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\cdot a_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\cdot a_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0 \qquad \therefore \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$$

同様に $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

(2)
$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\vec{k}=-\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}-\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

(3)
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow a_2:b_2=a_3:b_3,\ \ a_1:b_1=a_3:b_3,\ \ a_1:b_1=a_2:b_2$$
$$\Leftrightarrow a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3\Leftrightarrow\vec{a}/\!/\vec{b}$$

(4) $S:\vec{b},\vec{c}$ で定まる平行四辺形の面積 とすると $S=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\sin\theta \quad \left(\theta=\angle\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)\right)$

$$S^2=\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2\left(1-\cos^2\theta\right)=\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2-\left(\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta\right)^2=\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2$$
$$=\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)-\left(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\right)^2$$
$$=\left(b_2c_3-b_3c_2\right)^2+\left(b_1c_3-b_3c_1\right)^2+\left(b_1c_2-b_2c_1\right)^2=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|^2$$

求める体積 V は $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\right)$ として $V=$（底面積）×（高さ）

以上より $V=S\cdot\left|\vec{a}\right|\cos\varphi=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\varphi=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ $\quad V=\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$

以下の(1)…(6)に答えよ。

あるパーティで、ｎ人がひとつずつプレゼントを用意して、お互いに交換することになった。ｎ人には1番からｎ番までの番号がついているものとしすべてのプレゼントは区別できるものとする。本問では、集合Xの要素数を$|X|$　と表すことにする。

［ 集合$S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$の定義 ］

ｊ番（ただし、ｊは1以上ｎ以下の任意の整数）の人に着目する。ｊ番の人にその人自身が用意したプレゼントが当たるような交換のしかたすべての集合を$S(j)$と定義する。この記法は1パラメタに関するものであるが、これを任意の$k(1 \le k \le n)$個のパラメタに関する記法に拡張する。

あるk人$(j_1, j_2, \cdots, j_k)$がそれぞれ自分のプレゼントに当たることが同時におきるような交換のしかたすべての集合を$S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$と表す。ただし、次の（ａ）…（ｃ）の条件を満たすものとする。

（ａ）kは1以上n以下の任意の整数である。
（ｂ）$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$
（ｃ）$S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$に属する交換のしかたのなかには、$(j_1, j_2, \cdots, j_k)$以外の人で自分のプレゼントに当たっている人がいる交換のしかたも含まれるものとする。　　　　　　　　　　　　（定義終わり）

(1) プレゼントの交換のしかたは全部で何通りあるか。nを用いて表せ。

(2) 集合$S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$を$S(j_1)$, $S(j_2), \cdots, S(j_k)$を用いて表せ。

(3) $|S(j_1, j_2, \cdots, j_k)|$の値を$n$および$k$を用いて表せ。

(4) $|S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3)|$の値を$n$を用いて表せ。

(5) だれも自分のプレゼントには当たらないような交換のしかたは何通りあるか。nを用いて表せ。また、そのように表すことができる理由を簡単に説明せよ。

(6) n個のプレゼントをでたらめにn人に配ったとする。このとき自分のプレゼントが自分に配られるような人の数の期待値を求めよ。また、その導出過程も簡単に示せ。

解）

(1) ｎ文字の順列だからｎ！通り

(2) $S(j_1, j_2, \cdots, j_k) = S(j_1) \cap S(j_2) \cap \cdots \cap S(j_k)$

(3) 残り$(n-k)$文字の順列になるから$|S(j_1, j_2, \cdots, j_k)| = (n-k)!$

(4) $$|S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3)| = |S(j_1)| + |S(j_2)| + |S(j_3)| - |S(j_1, j_2)| - |S(j_1, j_3)| - |S(j_2, j_3)| + |S(j_1, j_2, j_3)|$$
$$= 3(n-1)! - 3(n-2)! + (n-3)! = (3n^2 - 12n + 13)(n-3)!$$

(5)　$n!-|S(1)\cup S(2)\cup\cdots\cup S(n)|$　通り

ここで（4）を一般化して

$$|S(1)\cup S(2)\cup\cdots\cup S(n)|=\sum_{j=1}^{n}|S(j)|-\sum_{1\le j_1<j_2\le n}|S(j_1,j_2)|+\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n}|S(j_1,j_2,\cdots,j_k)|+$$

$$\cdots+(-1)^{n}|S(1,2,\cdots,n)|$$

$$=n\cdot(n-1)!-{}_nC_2(n-2)!+\cdots+(-1)^{k-1}{}_nC_k(n-k)!+\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_n1!$$

$$=n!-\frac{n!}{(n-2)!2!}(n-2)!+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{n!}{(n-k)!k!}(n-k)!+\cdots$$

$$=n!\left(1-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)$$

従って、$n!-|S(1)\cup S(2)\cup\cdots\cup S(n)|$

$$=n!\left\{1-\left(1-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)\right\}$$

$$=n!\left(\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

(6)　j 番目の人にその人自身が用意したプレゼントが当たり残りの人は全部自分のプレゼントにあたらないような交換の仕方すべての集合を$T(j)$とする。　(5) より

$$|T(j)|=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}$$

さらに、$j_1\ne j_2\Rightarrow T(j_1)\cap T(j_2)=\varnothing$

だから誰か1人が自分自身のプレゼントにのみ当たる場合の数は

$$|T(1)\cup T(2)\cup\cdots\cup T(n)|=\sum_{j=1}^{n}|T(j)|=n\cdot(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}=n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}$$

2人の人に自分自身のプレゼントが当たり他はすべて違う場合の数は

$${}_nC_2(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{n!}{2!}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}$$

以下同様にして、r 人の人についての場合の数は

$${}_nC_r(n-r)!\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$$

誰か1人が自分自身のプレゼントにのみ当たる確率を　$P(1)$　とする

同様にｒ人が自分自身のプレゼントに当たり他はすべて別々に当たる確率を$P(r)$とする。このとき、

$P(r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{1}{k!}$ となる。従って、求める期待値Eは$E=\sum_{r=1}^{n}rP(r)$

$$E=\sum_{r=1}^{n}rP(r)=\sum_{r=1}^{n}r\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{(r-1)!k!}=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-l}\frac{(-1)^k}{l!k!}\quad(l=r-1)$$

$$=\sum_{h=0}^{n-1}\frac{1}{h!}\sum_{l+k=h}\frac{h!}{l!k!}(-1)^k=1+\sum_{h=1}^{n-1}\frac{1}{h!}\sum_{k=0}^{h}{}_nC_k(-1)^k=1+\sum_{h=1}^{n-1}\frac{1}{h!}(1+(-1))^h=1$$

[59] H8 大阪(基礎工)

区間 I = [-π, π] で連続な f(x)

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(1) $|a| < 1$, $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} R(k)$?

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx \cos kx\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a^j \int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx\,dx$$

$$\left[\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a^j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(j+k)x + \cos(j-k)x\}\,dx$$

[cos 関数は偶関数なので]

$$= \sum_{j=0}^{n} a^j \int_{0}^{\pi} \{\cos(j+k)x + \cos(j-k)x\}\,dx$$

(k = 0 のとき)

$$R(k) = \sum_{j=0}^{n} a^j \int_0^{\pi} \cos jx + \cos jx\,dx = 2\sum_{j=0}^{n} a^j \int_0^{\pi} \cos jx\,dx$$

$$= 2\left\{a^0 \int_0^{\pi} \cos 0\,dx + \sum_{j=1}^{n} a^j \int_0^{\pi} \cos jx\,dx\right\}$$

$$= 2\left\{\int_0^{\pi} dx + \sum_{j=1}^{n} a^j \left[\frac{1}{j}\sin jx\right]_0^{\pi}\right\} = 2[x]_0^{\pi} = 2\pi /\!/$$

(k ≧ 1 のとき)

$$R(k) = \sum_{j=0}^{n} a^j \int_0^{\pi} \cos(j+k)x + \cos(j-k)x\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a^j \left[\frac{1}{j+k}\sin(j+k)x + \frac{1}{j-k}\sin(j-k)\right]_0^{\pi}$$

[しかし、このとき j = k で j − k = 0 となるから j = k は別に考えて]

$$= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} a^j \underbrace{\left[\frac{\sin(j+k)x}{j+k} + \frac{\sin(j-k)x}{j-k} \right]_0^{\pi}}_{=0} + a^k \int_0^{\pi} \cos 2kx + \underbrace{\cos 0}_{1} \, dx$$

$$= a^k \int_0^{\pi} \cos 2kx + 1 \, dx = a^k \left[\frac{1}{2k} \sin 2kx + x \right]_0^{\pi}$$

$$= a^k (\pi - 0) = \pi a^k$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n} R(k) = R(0) + \sum_{k=1}^{n} R(k) = 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \pi a^k$$

$$= 2\pi + \pi \sum_{k=1}^{n} a^k$$

$$= 2\pi + \pi (a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)$$

$$= 2\pi + \pi a (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})$$

$$= 2\pi + \pi a \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} R(k) = \lim_{n \to \infty} \left(2\pi + \pi a \frac{1-a^n}{1-a} \right)$$

$[\,|a| < 1$ より$]$

$$= 2\pi + \pi a \frac{1}{1-a} = \pi \left(2 + \frac{a}{1-a} \right) = \pi \frac{2-2a+a}{1-a}$$

$$= \frac{2-a}{1-a} \pi$$

(2) $[-\pi, \pi]$ で常に $f(x) \geqq 0$ より

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

$$|R(k)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx\right| \quad —①$$

$$R(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$[f(x) \geqq 0$ より$]$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \quad —②$$

ここで $-1 \leqq \cos kx \leqq 1$ より

$$|f(x)\cos kx| \leqq |f(x)| \quad —③$$

また一般に

$$\left|\int_a^b g(x)\, dx\right| \leqq \int_a^b |g(x)|\, dx$$

(等号が成り立つのは $[a, b]$ で $g(x)$ が常に正又は負のとき)

より,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx\right| \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\cos x|\, dx \quad —④$$

①〜④より

$$|R(k)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx\right| \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\cos x|\, dx$$

$$\leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\, dx| = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = R(0)$$

$$\therefore\ |R(k)| \leqq R(0)$$

[60] H8 大阪 (基礎工)

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},\quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

(1) $$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= \underline{a_1a_2b_3} - a_1a_3b_2 - \underline{a_1a_2b_3} + \underline{a_2a_3b_1} + a_1a_3b_2 - \underline{a_2a_3b_1}$$

$$= 0$$

内積 $=0$ より $\mathbf{a}\perp(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) - b_2(a_1b_3 - a_3b_1) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= \underline{a_2b_1b_3} - \underline{a_3b_1b_2} - a_1b_2b_3 + \underline{a_3b_1b_2} + a_1b_2b_3 - \underline{a_2b_1b_3}$$

$$= 0$$

$\therefore\ \mathbf{b}\perp(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

(2) $$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$

$$= -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

$\therefore\ \mathbf{b}\times\mathbf{a} \neq \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ であり $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ である。

(3) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$

[証明] $\Rightarrow$)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

$$\therefore \begin{cases} a_2b_3-a_3b_2=0 \rightarrow a_2b_3=a_3b_2 \\ a_1b_3-a_3b_1=0 \rightarrow a_1b_3=a_3b_1 \\ a_1b_2-a_1b_2=0 \rightarrow a_1b_2=a_2b_1 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a_3}{a_2}=\frac{b_3}{b_2},\quad \frac{a_3}{a_1}=\frac{b_3}{b_1},\quad \frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$$

$$\therefore a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$$

$$\therefore \mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$$

$\Leftarrow$)

$\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$ ならば $a_1=kb_1,\ a_2=kb_2,\ a_3=kb_3$ (kは実数)

と表わされるので

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{0}$$

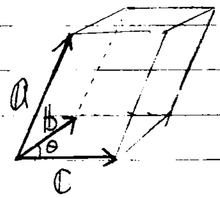
別解) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow a_2:a_3=b_2:b_3,\ a_1:a_3=b_1:b_3,\ a_1:a_2=b_1:b_2$

$$\Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

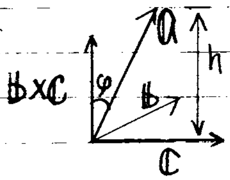
$$\Leftrightarrow \mathbf{a} /\!/ \mathbf{b}$$

(4) 図のように $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をとり、$|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $|\mathbf{c}| = c$ とすると



底面の平行四辺行の面積 S は

$$S = b \cdot c \sin\theta = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$$



底面に対する高さ h は、$\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ が $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ に互いに垂直なので、それと $\mathbf{a}$ のなす角を φ とすると

$$h = a\cos\varphi$$

よって 六面体の体積 V は

$$V = Sh = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| a\cos\varphi$$

$$= |\mathbf{a}||\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\cos\varphi$$

$$= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$V > 0$ なので

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

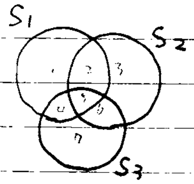
[61] H8 大阪(基礎工)

(1) n個のプレゼントを順に並べる順列と同じなので $n!$ //

(2) $S(j_1, j_2, \cdots, j_k) = S(j_1) \cup S(j_2) \cup \cdots \cup S(j_k)$

(3) $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ が成立するとき k個のプレゼントを固定して、
(n−k)個を並べる順列なので $(n-k)!$ //

(4)



1 ○
2 ○ ●
3 ○
4 ○ ●
5 ○ ● ●
6 ○ ●
7 ○

$$|S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3)|$$
$$= |S(j_1)| + |S(j_2)| + |S(j_3)|$$
$$- |S(j_1) \cap S(j_2)| - |S(j_2) \cap S(j_3)| - |S(j_3) \cap S(j_1)|$$
$$+ |S(j_1) \cap S(j_2) \cap S(j_3)|$$
$$= (3-1)! + (3-1)! + (3-1)!$$
$$- (3-2)! - (3-2)! - (3-2)!$$
$$+ 1$$
$$= 3 \times 2! - 3 \times 1! + 1 = 3 \times 2 - 3 + 1 = 4$$ //

(5) 少なくとも1人は自分のプレゼントにあたる組み合わせは

$$|S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3) \cup \cdots \cup S(j_n)|$$

[(4)より] $= {}_nC_1(n-1)! - {}_nC_2(n-2)! - \cdots + {}_nC_n(n-n)!$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} {}_nC_1 (n-i)!$$

だれも自分のプレゼントにあたらない組合せは、全体から引いて

$$n! - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}{}_nC_i(n-i)!$$

$$= n! - \left(\frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. \cdots\cdots + (-1)^{i+1}\frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)! + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!(n-n)!}{n!(n-n)!}\right)$$

$$= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots\cdots + (-1)^i\frac{n!}{i!} + \cdots + (-1)^n$$

$$= \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}$$

$$= n!\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$= n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \quad // \qquad \left(= n!\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

(6) 1人だけ同じプレゼントになる組合せは、(5)より1人だけプレゼントを固定して残り$(n-1)$人はあたらないとして

$$(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}$$

これを n人なので確率$P(1)$は nを掛けて全体の$n!$で割って

$$P(1) = \frac{1}{n!}n(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}$$

k人の場合は、まずそのk人の選び方は${}_nC_k$通り

$$\therefore P(k) = \frac{1}{n!}{}_nC_k(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n!}}\frac{\cancel{n!}}{k!\cancel{(n-k)!}}\cancel{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

よって期待値Eは

$$E = \sum_{k=1}^{n} k P(k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

[ここで $l=k-1$ とおく]

$$= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-(l+1)}\frac{(-1)^i}{l!\,i!}$$

[ここで $h=l+i$ とおくと $\frac{h!}{l!\,i!} = {}_hC_i$ なので]

$$= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-(l+1)}\frac{1}{h!}\frac{h!}{l!\,i!}(-1)^i = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-(l+1)}\frac{1}{h!}{}_hC_i(-1)^i$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{l!}{}_lC_0(-1)^0 + \sum_{i=1}^{n-(l+1)}\frac{1}{h!}{}_hC_i(-1)^i\right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1}\left\{1 + \{1+(-1)\}^{n-(l+1)}\right\}$$

?