H7　京都

[1]　xy－平面で次の関数がある。

$$y=x^3 \quad (0 \le x \le 1)$$

これをx軸を軸として回転させたときその表面積Sを求めよ。

解）

$$S=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$
$$=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx$$
$$=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$$
$$=2\pi\int_1^{\sqrt{10}} t\frac{1}{18}t\,dt \quad \left(\begin{array}{l} set \quad t=\sqrt{1+9x^4} \quad t^2=1+9x^4 \\ 2t\,dt=36x^3dx \ \therefore x^3\,dx=\dfrac{1}{18}t\,dt \end{array}\right)$$
$$=\frac{\pi}{9}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

参考；回転体の表面積

$$y=f(x) \quad (a \le x \le b)$$

のx軸の周りの回転体の表面積Sは、

$$\boxed{\text{公式} \quad S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

H7　京都

[2]　次の重責分を求めよ。

$$I=\iiint_D xyz\,dxdydz \quad 但し \quad D=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\, x^2+y^2+z^2\le 1,\ 0\le x,y,z\right\}$$

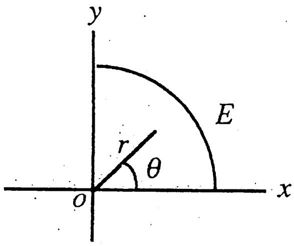
解）

$E=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\, x^2+y^2\le 1, 0\le x, 0\le y\right\}$として

$$\begin{aligned}
I&=\iint_E xy\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz\right)dxdy\\
&=\iint_E xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\\
&=\iint_G r^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta\\
&=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr\right)\\
&=\left(\int_0^1\tau d\tau\right)\left(\int_1^0 (1-t^2)t(-t)dt\right)
\end{aligned}$$

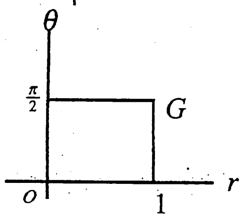
$$\begin{pmatrix} set \quad \tau=\sin\theta \\ d\tau=\cos\theta d\theta \\ \tau:0\to 1\,(\theta:0\to\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} set \quad t=\sqrt{1-r^2} \\ r^2=1-t^2 \quad rdr=-tdt \\ t:1\to 0\,(r:0\to 1) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (t^2-t^4)dt=\frac{1}{15}$$



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$dxdy=rdrd\theta$$



[3]　$m\times n$行列Xがある。

$$X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\quad A\text{は}k\text{次正則行列で}\quad k<m,\ k<n$$

このとき、

$$rank(X)=k\Leftrightarrow D=CA^{-1}B$$

を示せ。

証）$X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_{k+1},\cdots,\mathbf{b}_n\\ \mathbf{c}_1,\cdots,\mathbf{c}_k,\mathbf{d}_{k+1},\cdots,\mathbf{d}_n\end{pmatrix}$

$\Leftarrow$）$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}E & -A^{-1}B\\ O & E\end{pmatrix}}_{\text{正則}}=\begin{pmatrix}A & -B+B\\ C & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ C & O\end{pmatrix}$　（$\because$　仮定）

$\Rightarrow$）$f:\mathbf{K}^n\ni\mathbf{x}\mapsto X\mathbf{x}\in\mathbf{K}^m$　とおく。　$rank(f)=rank(X)$

$k=rank(f)=\dim\mathrm{Im}(f)=\dim\mathbf{K}^n-\dim\ker(f)\quad\therefore\dim\ker(f)=n-k$

そこで$\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n$を$\ker(f)$の基とする。このとき、$\mathbf{K}^n$の基本ベクトル系のはじめの$\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_k$を付け加える。このとき、

$\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_k,\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n$；一次独立

$\because$）　$f(\mathbf{e}_j)=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_j\\ \mathbf{c}_j\end{pmatrix}\quad(1\le j\le k)\quad f(\mathbf{v}_r)=\mathbf{0}\quad(k+1\le r\le n)$

（＊）　$x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_k\mathbf{e}_k+x_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+x_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$

と仮定するとfでうつして　$f(\mathbf{v}_r)=\mathbf{0}\quad(k+1\le r\le n)$

$x_1\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{c}_2\end{pmatrix}+\cdots+x_k\begin{pmatrix}\mathbf{a}_k\\ \mathbf{c}_k\end{pmatrix}=\mathbf{0}\quad x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$

$\therefore x_1=\cdots=x_k=0$（$\because A$；正則）従って$x_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+x_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$

（$\because$（＊））

$\therefore x_{k+1}=\cdots=x_n=0$（$\because\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n;\ker(f)$の基）

$$(f(\mathbf{e}_1),\cdots,f(\mathbf{e}_k),f(\mathbf{v}_{k+1}),\cdots,f(\mathbf{v}_n))=\left(\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{c}_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\mathbf{a}_k\\ \mathbf{c}_k\end{pmatrix},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}\right)=\begin{pmatrix}A & O\\ C & O\end{pmatrix}$$

$$(X\mathbf{e}_1,\cdots,X\mathbf{e}_k,X\mathbf{v}_{k+1},\cdots,X\mathbf{v}_n)=X(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_k,\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n)$$

$X\begin{pmatrix}E & P\\ O & R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ C & O\end{pmatrix}$　　ここで$\begin{vmatrix}E & P\\ O & R\end{vmatrix}\neq0\quad\therefore|R|\neq0\quad\therefore R$；正則

$\therefore\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & P\\ O & R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ C & O\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{pmatrix}A & AP+BR\\ C & CP+DR\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ O & O\end{pmatrix}$

$\therefore O=AP+BR\quad\therefore P=-A^{-1}BR$

$O=CP+DR\quad\therefore DR=-CP=CA^{-1}BR$

$\therefore D=CA^{-1}B$　　（$\because R$；正則）

H7　京都

[4]　$xyz-$空間で次の関数がある。

$$f(x,y,z)=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

このとき、

$$x^2+y^2+z^2=1$$

上の点における最大値と最小値、そしてその値をとる点すべてをあげよ。

解)

$0\le x^2,y^2,z^2$　　$\therefore f\ge 0$　今　$x^2=1, y=z=0$とすると、$f=0$

$f_{\min}=0$　逆に　$f=0$　とすると、$x^2(y^2+z^2)=0\ \&\ y^2z^2=0$

$x^2=0\ or\ x^2\ne 0$そしてこのとき$y^2+z^2=0$故$x^2=1$したがって$y^2=z^2=0$

同様にして以上をまとめると

$f=0\Rightarrow(x^2=1, y=z=0),(x=z=0, y^2=1),(x=y=0, z^2=1)$

そしてこれらのとき$f=0$

次に

$X=x^2, Y=y^2, Z=z^2$とおくと$X+Y+Z=1$, $f=XY+YZ+ZX$

$f=XY+(X+Y)Z=XY+(X+Y)(1-X-Y)$　$(0\le X,Y,X+Y\le 1)$

$=-X^2-XY-Y^2+X+Y$

$f_X=-2X-Y+1$　$f_Y=-X-2Y+1$　$f_X=f_Y=0$　より

$X=Y=\dfrac{1}{3}$　従って　$Z=\dfrac{1}{3}$　$f_{XX}=-2$　$f_{XY}=-1$　$f_{YY}=-2$

$A=-2$　$B=-1$　$C=-2$

$D=B^2-AC=-3<0, A<0$　$\therefore X=Y=\dfrac{1}{3}$で　$f_{\max}=\dfrac{1}{3}$

OR

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$によって$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$

と変換すると$f=\xi^2-\dfrac{1}{2}\eta^2-\dfrac{1}{2}\zeta^2$、$1=X+Y+Z=\sqrt3\xi$, $i.e.\ \xi=\dfrac{1}{\sqrt3}$

$f_{\max}=\dfrac{1}{3}$　$\left(\eta=\zeta=0, \xi=\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$　$X=Y=Z=\dfrac{1}{3}$のとき