［６２］Ｈ７　大阪（基礎工）

（１）$e^x > \dfrac{x^2}{2}$を証明せよ$(0 \le x)$。

（２）$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$を証明せよ。

（３）$\int_0^1 \log x\,dx$を求めよ。

（４）$I = \displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy\ (D; x^2+y^2 \le 1)$を求めよ。

解)

（１）$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots > \dfrac{x^2}{2!}\quad (0 \le x)$

（２）$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{t\to(-\infty)} e^t t = -\lim_{\theta\to\infty} e^{-\theta}\theta = -\lim_{\theta\to\infty}\frac{\theta}{e^\theta} = 0$

$(t = \log x)$

$\left(\because (1)\text{より} e^\theta > \dfrac{\theta^2}{2}\ (0 \le \theta)\quad \text{だから}\quad \dfrac{\theta}{e^\theta} < \dfrac{2}{\theta} \to 0\ (\theta \to \infty)\right)$

（３）$\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[x\log x - x\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1-(\varepsilon\log\varepsilon - \varepsilon)\right) = -1\ (\because (2))$

（４）$I = \displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy = \iint_K \frac{\log r^2}{(r^2)^{\frac{1}{4}}} r\,dr\,d\theta$

$\displaystyle = \iint_K \frac{2\log r}{r^{\frac{1}{2}}} r\,dr\,d\theta = \iint_K 2r^{\frac{1}{2}}\log r\,dr\,d\theta$

$\displaystyle = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 t\log t^2 \cdot 2t\,dt\right)dr$

$\left(set\quad t = r^{\frac{1}{2}}, r = t^2, dr = 2tdt, t: 0 \to 1 (r: 0 \to 1)\right)$

$\displaystyle = 16\pi\int_0^1 t^2 \log t\,dt = \frac{16\pi}{3}\int_0^1 (t^3)' \log t$

$\displaystyle = \frac{16\pi}{3}\left\{\left[t^3\log t\right]_{+0}^1 - \int_0^1 t^3 \frac{1}{t}dt\right\}$

$\displaystyle = \frac{16\pi}{3}\left\{0 - \lim_{t\to+0} t^2 \cdot t\log t - \frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1\right\} = \frac{16}{3}\pi\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{9}\pi$

［６３］Ｈ７　大阪（基礎工）
$F=3x^2+2xy+3y^2$について

（１）二次形式Fの表現行列Aを求めよ。
（２）Aの固有値α,βおよびそれに対応する単位固有ベクトル$\mathbf{u},\mathbf{v}$を求めよ。
（３）$\mathbf{u},\mathbf{v}$が直交することを示せ。
（４）一般に相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ。
（５）$P=(\mathbf{u},\mathbf{v})$としたとき、$P$は直交行列であることを示せ。
（６）Aを対角化せよ。
（７）Fの標準形を求めよ。

解）

（１）$F=\begin{pmatrix}3x^2+xy\\+xy+3y^2\end{pmatrix}=(x\quad y)\begin{pmatrix}3x+y\\x+3y\end{pmatrix}=(x\quad y)\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$

（２）$A\mathbf{v}=t\mathbf{v}\quad\left(\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}\right)\qquad(tE-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}\quad\therefore|tE-A|=0$

$0=\begin{vmatrix}t-3&-1\\-1&t-3\end{vmatrix}=(t-2)(t-4)$　故に$t=2,4$；Aの固有値

$t=2$のとき，$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\therefore y=-x,\ \mathbf{v}=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\|\mathbf{v}\|=1\quad\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbf{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$t=4$のとき，$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\therefore y=x\quad\mathbf{u}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\|\mathbf{u}\|=1\quad\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbf{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

（３）内積$(\mathbf{v},\mathbf{u})=\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0\quad\therefore\mathbf{v}\perp\mathbf{u}$

（４）A；$n\times n$実対称行列$({}^tA=A)$とする。

このとき，Aの固有値は実数であることが知られている。

$A\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u},\ A\mathbf{v}=\beta\mathbf{v}\quad(\alpha\neq\beta,\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0})$　但し　$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$とすると

$(\alpha-\beta)(\mathbf{u},\mathbf{v})=\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})-\beta(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\alpha\mathbf{u},\mathbf{v})-(\mathbf{u},\beta\mathbf{v})=(A\mathbf{u},\mathbf{v})-(\mathbf{u},A\mathbf{v})$

$={}^t(A\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}-{}^t\mathbf{u}\cdot A\cdot\mathbf{v}={}^t\mathbf{u}\cdot{}^tA\cdot\mathbf{v}-{}^t\mathbf{u}\cdot A\cdot\mathbf{v}=0\quad(\because{}^tA=A)$

$\therefore\quad(\mathbf{u},\mathbf{v})=0\quad(\because\alpha\neq\beta)$

（５）${}^tP\cdot P=\begin{pmatrix}{}^t\mathbf{u}\\{}^t\mathbf{v}\end{pmatrix}(\mathbf{u}\quad\mathbf{v})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=E\quad\therefore P$；直交行列

（６）$AP=(A\mathbf{u}\quad A\mathbf{v})=(4\mathbf{u}\quad 2\mathbf{v})=(\mathbf{u}\quad\mathbf{v})\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}=PD\quad\therefore{}^tPAP=D$

（７）$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$とおくと$F=4\xi^2+2\eta^2$

たて1（m）よこn（m）の床F_n　がある。この床にたて1（m）よこk（m）のタイルT_kを何枚か使ってしき詰めたい。T_kは何枚使ってもよいものとする。しき方の順は問わないとして、F_nをタイルでしき詰めるしき方をf_n通りとする。またT_1を使わずにしくとき、そのしき詰め方をg_n通りとする。

但し、n,kは整数である。

（１）$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_2 + f_1 + 1$であることを示せ。

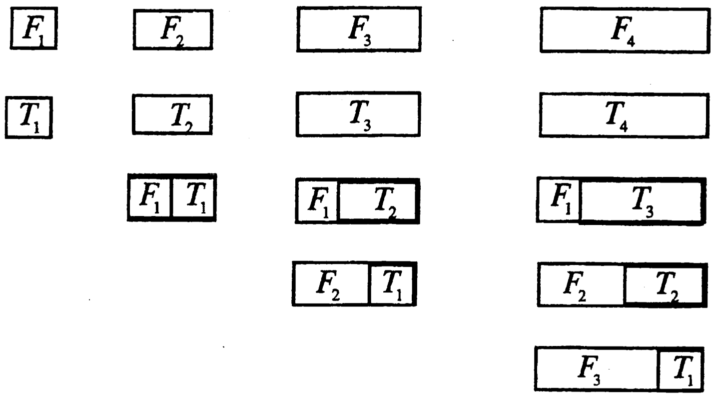
（２）f_nを求めよ。

（３）$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$であることを示せ。

（４）g_nを求めよ。

解）

（１）$n = 1,2,3,4$の場合につて



$f_1 = 1, f_2 = 1 + f_1, f_3 = 1 + f_1 + f_2, f_4 = 1 + f_1 + f_2 + f_3$となる。つまり，$F_3$のタイルしき詰めは，まず、$T_3$を1枚、次に、$T_2$を右端に1枚、残った床$F_1$には$f_1$通りのしき詰め方がある。次に、$T_1$を右端に1枚、残った床$F_2$には$f_2$通りのしき詰め方がある。$F_4$以上も同様である。つまり、$F_n$に対しては先ず$T_n$を右端に1枚、次に$T_{n-1}$を右端に1枚残った床$F_1$には$f_1$通りのしき方がある。さらに、また$T_{n-2}$を右端に1枚残った床$F_2$には$f_2$通りのしき方がある。以下順々にやって（１）の結論を得る。

（２）（１）より$f_n = f_{n-1} + (f_{n-2} + \cdots + f_1 + 1) = f_{n-1} + f_{n-1} = 2f_{n-1}$

$$= 2^2 f_{n-2} = 2^3 f_{n-3} = \cdots = 2^{n-1} f_1 = 2^{n-1}$$

（３）各F_{n-1}のしき詰めで右端のT_rをT_{r+1}でとりかえる。あるいは、F_{n-2}の右端にT_2をつけ足す形でF_nをしきつ詰める。こうしてF_nがしき詰められる。

$\therefore g_n = g_{n-1} + g_{n-2} \quad g_2 = g_3 = 1$

（４）$t^2 - t - 1 = 0$の解を$\alpha, \beta\,(\alpha < \beta)$とおく。$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, g_n - (\alpha+\beta)g_{n-1} + \alpha\beta g_{n-2} = 0$

$g_n - \alpha g_{n-1} = \beta g_{n-1} - \alpha\beta g_{n-2} = \beta(g_{n-1} - \alpha g_{n-2}) = \cdots = \beta^{n-3}(g_3 - \alpha g_2)$

同様に$g_n - \beta g_{n-1} = \alpha^{n-3}(g_3 - \beta g_2)$

$\therefore g_n - \alpha g_{n-1} = \beta^{n-3}(1-\alpha) = \beta^{n-2} \cdots ①\quad g_n - \beta g_{n-1} = \alpha^{n-2} \cdots ②$

①−②より$(\beta - \alpha)g_{n-1} = \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} \quad \therefore \quad g_{n-1} = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(\beta^{n-2} - \alpha^{n-2})$

$$g_n = \frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

[62] H7 大阪(基礎工)

(1) $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ の証明 $(x \geqq 0)$

e^x をマクローリン展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^{\theta x}}{3!} \qquad (0 \leqq \theta < 1)$$

より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^{\theta x}}{6} \qquad (0 \leqq \theta < 1)$$

$x \geqq 0$ より $\qquad e^x > \dfrac{x^2}{2}$ //

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ の証明

$$\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

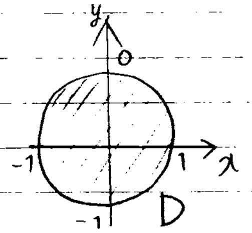
こうすると $\dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[(x \to +0)]{} \dfrac{-\infty}{\infty}$ の不定形になり、ロピタルを用いて

$$\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +0} -x = 0 \text{ //}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx = \int_0^1 (x)' \log x \, dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 x (\log x)' dx$

$$= \underbrace{1 \log 1}_{0} - 0 - \int_0^1 x \frac{1}{x} dx = -\int_0^1 dx = -1 \text{ //}$$

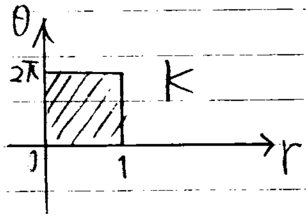
(4) $I=\iint_D \dfrac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}\,dxdy$ $\quad D: x^2+y^2 \leqq 1$



$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$\longrightarrow$

$dxdy=rdrd\theta$



変数変換行列（ヤコビアン行列）J は

$$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

$$dxdy=|J|drd\theta=rdrd\theta \quad , r^2=x^2+y^2$$

$$I=\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy=\iint_K \frac{\log r^2}{(r^2)^{\frac{1}{4}}}rdrdy=\iint_K \frac{2\log r}{\sqrt{r}}r\,drd\theta$$

$$=\iint_K 2\sqrt{r}\log r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 2\sqrt{r}\log r\,dr=4\pi\int_0^1\sqrt{r}\log r\,dr$$

$$\left[t=\sqrt{r}\ ,\ \frac{dt}{dr}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\ ,\ dr=2\sqrt{r}dt=2tdt\ ,\ t:0\sim1\right]$$

$$=4\pi\int_0^1 t\log t^2\,(2tdt)=16\pi\int_0^1 t^2\log t\,dt$$

$$=16\pi\int_0^1\left(\frac{t^3}{3}\right)'\log t\,dt=16\pi\left\{\left[\frac{t^3}{3}\log t\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^3}{3}(\log t)'dt\right\}$$

$$=\frac{16}{3}\pi\left\{\lim_{\varepsilon\to0}\left[t^3\log t\right]_\varepsilon^1-\int_0^1 t^2dt\right\}=\frac{16}{3}\pi\left\{\lim_{\varepsilon\to0}(-\varepsilon^3\log\varepsilon)-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\right\}$$

$$\left[\lim_{\varepsilon\to0}(-\varepsilon^3\log\varepsilon)=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\log\varepsilon}{\varepsilon^{-3}}=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{-1}}{-3\varepsilon^{-4}}=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^3=0\right]$$

$$=\frac{16}{3}\pi\left\{0-\frac{1}{3}\right\}=-\frac{16}{9}\pi \ /\!/$$

$\downarrow$

[$\varepsilon^3\log\varepsilon=\varepsilon^2\times\varepsilon\log\varepsilon$ と考えると楽]

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836S 6mm ruled×36 lines

[63] H7 大阪(基礎工)

$F = 3x^2 + 2xy + 3y^2$

(1) 二次形式Fの表現行列A?

$$F = \begin{pmatrix} 3x^2 + xy \\ +xy + 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(3x+y) \\ +y(x+3y) \end{pmatrix} = (x \ y)\begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \end{pmatrix}$$

$$= (x \ y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Aの固有値 α, β と 固有ベクトル $\mathbb{u}, \mathbb{v}$

固有値 λ とすると

$A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$

$|\lambda E - A|\mathbb{x} = \mathbb{0}$ 　　　但し $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + \underset{2\,4}{8}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-4) = 0$$

$$\therefore \lambda = 2, 4 \qquad \therefore (\alpha, \beta) = (2, 4)$$

固有値 α $(\lambda=2)$ に対して

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{0} \qquad \therefore y = -x \qquad \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$|\mathbb{x}| = 1$ より $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 　　$\therefore \mathbb{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\beta(\lambda=4)$に対して

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\mathbf{0} \qquad \therefore x=y \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{x}|=1$より $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \therefore \boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

(3) 内積 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}(1-1)=0$

$[\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})={}^t\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,]$

$\therefore$ 内積が0なので $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$

(4) 二次形式の表現行列Aは対称行列である。

そのAの固有値のうちの2つをα,βとし、さらにそれの固有ベクトルを $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$とする。

$$\begin{cases} A={}^tA & \text{—①}\\ A\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u} & \text{—②}\\ A\boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{v} & \text{—③}\end{cases}$$

$\boldsymbol{u}$と$\boldsymbol{v}$の内積が0であることを示す。

$$(\alpha-\beta)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\alpha\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u},\beta\boldsymbol{v})$$

$$=(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})$$

$= {}^t(A\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} - {}^t\boldsymbol{u}\cdot A\boldsymbol{v}$

$= {}^t\boldsymbol{u}\cdot{}^tA\cdot\boldsymbol{v} - {}^t\boldsymbol{u}\cdot A\cdot\boldsymbol{v}$

$= {}^t\boldsymbol{u}\cdot A\cdot\boldsymbol{v} - {}^t\boldsymbol{u}\cdot A\cdot\boldsymbol{v}$

$= 0$

ここで α と β は異なる固有値なので $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$

$\therefore\ \boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$

(5) $P=(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

P が直交行列 $\Leftrightarrow P\,{}^tP=E$ なので

$P\,{}^tP=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$ $\qquad\therefore$ P：直交行列

(6) $AP=A(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})=(A\boldsymbol{u}\ A\boldsymbol{v})=(2\boldsymbol{u}\ 4\boldsymbol{v})$

$=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=PD$

$P^{-1}AP=D$ より $\qquad\therefore D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

(7) $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$F = {}^t\mathbb{x} A \mathbb{x} = {}^t\mathbb{x} P^{-1} D P \mathbb{x} = {}^t\mathbb{x} {}^tP D P \mathbb{x}$$

$$= {}^t(P\mathbb{x}) D (P\mathbb{x})$$

ここで $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = P\mathbb{x} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと

$$F = {}^t\mathbb{p} D \mathbb{p} = (p\ q)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$= 2p^2 + 4q^2$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-A3AC 6mm ruled×36 lines

[64] H7 大阪(基礎工)

(1) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_2 + f_1 + 1$

[証明] 横 n [m] としたとき T_n を使えば 1通り

端に T_{n-1} を使えばすき間が 1[m] なので f_1 通り、

〃 T_{n-2} 〃 2[m] 〃 f_2 〃

⋮

〃 T_{n-k} 〃 k[m] 〃 f_k 〃

⋮

〃 T_1 〃 $(n-1)$[m] 〃 f_{n-1} 通りとなり、全ての

組み合わせは $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_2 + f_1 + 1$ 通りとなる。

(2) $f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 4,\ f_4 = 8 \ \cdots\cdots \ \therefore f_n = 2^{n-1}$ //

別解] $f_n = f_{n-1} + (f_{n-2} + \cdots + f_1 + 1) = f_{n-1} + f_{n-1} = 2f_{n-1}$

$f_n = 2f_{n-1} = 2(2f_{n-2}) = \cdots = 2^k f_{n-k} = \cdots = 2^{n-1} f_1 = 2^{n-1}$ //

(3) $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$

[証明] 横 n [m] のとき (1) と同様 T_n を使えば 1通り

端に T_{n-1} を使うと残り T_1 を使うしかないので駄目

〃 T_{n-2} を使うと残りを g_2 通りでしき詰めれる。

⋮

〃 T_{n-k} 〃 g_k 〃

⋮

〃 T_2 を使うと残りを g_{n-2} 〃

よって $g_n = g_{n-2} + g_{n-3} + \cdots + g_3 + g_2 + 1$

また $g_{n-1} = g_{n-3} + g_{n-4} + \cdots + g_3 + g_2 + 1$ より

$\therefore g_n = g_{n-2} + g_{n-1} \quad (n \geqq 4)$

但し $g_2 = 1,\ g_3 = 1$

(4) $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$

$g_{n-1} = g_{n-1}$

$$\begin{pmatrix} g_n \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n-1} \\ g_{n-2} \end{pmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} g_n \\ g_{n-1} \end{pmatrix}$ とすると

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_{n-1}$$

ここで $\boldsymbol{a}_n = r\boldsymbol{a}_{n-1}$ と考えると、これは等比数列であり

$$\boldsymbol{a}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \boldsymbol{a}_{n-1} = r\boldsymbol{a}_{n-1}$$

$$|A - rE|\boldsymbol{a}_{n-1} = \boldsymbol{0}$$

$\therefore$ Aの固有値rは

$$|A - rE| = \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = -r(1-r) - 1 = r^2 - r - 1 = 0$$

$$\therefore r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} a_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} g_n \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} g_{n-1} \\ g_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$g_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} g_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n-1} \\ g_{n-2} \end{pmatrix} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} g_{n-1} \\ g_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$g_{n-1} + g_{n-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} g_{n-1}$$

$$g_{n-1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} g_{n-2}$$

等差数列だから　$g_0 = 1$ と仮におくと

$$g_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} g_0 \quad \text{より} \quad g_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad g_1' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$g_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad g_n' = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$g_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$ とおいて

初期値　$g_2 = 1, g_3 = 1$　なので

$n=2$:　$g_2 = 1 = \alpha + \beta$ 　—①

$n=3$:　$g_3 = 1 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 　—②

$② - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times ①$

$$
\begin{array}{lrcl}
② & 1 & = & \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
①' \quad -) & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & = & \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
\hline
 & 1-\frac{1+\sqrt{5}}{2} & = & \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)
\end{array}
$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}\beta \qquad \therefore \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

①に代入して $\alpha = 1-\beta$

$$= 1-\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad //$$