［８８］Ｈ６大阪（工）

$$x^2+y^2+6x+2y+a=0,\quad x^2+y^2-4x-2y-3a=0$$

（１）この２つの円が交わっているとして交点を結んだ直線の式を求めよ。

（２）（１）の結果を用いて円が交わるための条件を求めよ。

解）

$$f(x,y)=x^2+y^2+6x+2y+a=0, f=0\cdots\cdots①$$

$$g(x,y)=x^2+y^2-4x-2y-3a=0, g=0\cdots\cdots②$$

（１）①，②が交わっているとき交点を結んだ直線の式は

$f+kg=0$（k；未定）　これを整理して，

$$(1+k)(x^2+y^2)+(6-4k)x+(2-2k)y+a-3ak=0\cdots\cdots③$$

これが直線だから，$k=-1$これを③に代入して，

$5x+2y+2a=0\cdots\cdots④$　；求める直線

（２）①と④が交わる。④より　$y=-\dfrac{5}{2}x-a$　これを①に代入して整理すると

$$\frac{29}{4}x^2+(5a+1)x+a^2-a=0\cdots\cdots⑤$$

⑤の判別式＞０　$\therefore\ (5a+1)^2-4\cdot\dfrac{29}{4}\cdot(a^2-a)>0$

$\therefore 4a^2-39a-1<0$　故に　$\dfrac{39-\sqrt{1537}}{8}<a<\dfrac{39+\sqrt{1537}}{8}$

5月8日

[８９] Ｈ６大阪(工)

ある減少関数 $f(x)$ について

（１） $f(2)+f(3)+\cdots+f(n)<\int_1^n f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$
を証明せよ。

（２） $S_n=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}$ （$p>0, n$は自然数）とする。
$p=1$のとき，$\log(n+1)<S_n<\log n+1$ を（１）を用いて示せ。

（３） $p\neq 1$のとき，$A(n,p)<S_n<B(n,p)$ となる $A(n,p)$ と $B(n,p)$ を（１）を用いて求めよ。

解)

（１） $k<x<k+1$のとき $f(k+1)<f(x)<f(k)$ 両辺を $\int_k^{k+1}(\ )dx$ より

$$f(k+1)\int_k^{k+1}dx<\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k)\int_k^{k+1}dx$$

$$\therefore f(k+1)<\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k)\cdots\cdots①$$

①で $k=1,2,\cdots,(n-1)$ として辺辺加えると，

$$f(2)+\cdots+f(n)<\left(\int_1^2+\cdots+\int_{n-1}^n\right)f(x)dx<f(1)+\cdots+f(n-1)$$

$$\therefore f(2)+\cdots+f(n)<\int_1^n f(x)dx<f(1)+\cdots+f(n-1)$$

（２） $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと $f(x)$ は減少関数，（１）より

(＊) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

前半の不等式 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\int_1^n\dfrac{1}{x}dx\cdots\cdots①$

①の両辺に１を加えて

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<[\log x]_1^n+1=\log n+1$$

$$\therefore S_n<\log n+1$$

再び（１）より，$\int_1^{n+1}\dfrac{1}{x}dx<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\cdots\cdots②$

$\therefore [\log x]_1^{n+1}<S_n$ 　　故に，$\log(n+1)<S_n$

以上より，$\log(n+1)<S_n<\log n+1$

（３） $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ とおくと，$f(x)$ は減少関数

（２）と同様にして

$$S_n<\int_1^n x^{-p}dx+1=B(n,p),\quad A(n,p)=\int_1^{n+1}x^{-p}dx<S_n$$

$$\therefore A(n,p)=\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right),\quad B(n,p)=\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)+1$$

［９０］Ｈ６大阪(工)

ある減少関数$f(x)$について

（１）$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)<\int_1^n f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$
を証明せよ。

（２）$S_n=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}$（$p>0, n$は自然数）とする。
$p=1$のとき，$\log(n+1)<S_n<\log n+1$ を（１）を用いて示せ。

（３）$p\neq 1$のとき，$A(n,p)<S_n<B(n,p)$となる$A(n,p)$と$B(n,p)$を（１）を用いて求めよ。

解)

（１）$k<x<k+1$のとき$f(k+1)<f(x)<f(k)$両辺を$\int_k^{k+1}(\ )dx$より

$$f(k+1)\int_k^{k+1}dx<\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k)\int_k^{k+1}dx$$

$$\therefore f(k+1)<\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k)\cdots\cdots①$$

①で$k=1,2,\cdots,(n-1)$として辺辺加えると，

$$f(2)+\cdots+f(n)<\left(\int_1^2+\cdots+\int_{n-1}^n\right)f(x)dx<f(1)+\cdots+f(n-1)$$

$$\therefore f(2)+\cdots+f(n)<\int_1^n f(x)dx<f(1)+\cdots+f(n-1)$$

（２）$f(x)=\dfrac{1}{x}$とおくと$f(x)$は減少関数，（１）より

(＊) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

前半の不等式$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\int_1^n\dfrac{1}{x}dx\cdots\cdots①$

①の両辺に１を加えて

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\left[\log x\right]_1^n+1=\log n+1$$

$$\therefore S_n<\log n+1$$

再び（１）より，$\int_1^{n+1}\dfrac{1}{x}dx<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\cdots\cdots②$

$\therefore\left[\log x\right]_1^{n+1}<S_n$　　故に，$\log(n+1)<S_n$

以上より，$\log(n+1)<S_n<\log n+1$

（３）$f(x)=\dfrac{1}{x^p}$とおくと，$f(x)$は減少関数

（２）と同様にして

$$S_n<\int_1^n x^{-p}dx+1=B(n,p),\quad A(n,p)=\int_1^{n+1}x^{-p}dx<S_n$$

$$\therefore A(n,p)=\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right),\quad B(n,p)=\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)+1$$

5月8日

[９１] Ｈ６大阪（工）

A君，Ｂ君がジャンケンをして勝てば１点をやりとりするゲームを行う。Ａ，Ｂが　グー，チョキ，パー　を出す確率を　$g_A, g_B, c_A, c_B, p_A, p_B$　とする。

（１）１回行うときＡ君の期待値を求めよ。

（２）Ａ君がパー，Ｂ君がグーをそれぞれ出さないとき，（１）をc_A, c_Bを用いて表せ。

（３）さらに$c_A = c_B = c$としてＡ君の期待値が最大となるcを求めよ。

（４）$c_A = c_B = \dfrac{1}{2}$としてＡ君の期待値を求め，さらにＡ君とＢ君のどちらが有利か示せ。

解）

（１）$g_A + c_A + p_A = 1$，$g_B + c_B + p_B = 1$，$E(A) = g_A c_B + c_A p_B + p_A g_B$

（２）（１）で$p_A = 0$，$g_B = 0$　とすると　$g_A = 1 - c_A$，$p_B = 1 - c_B$

$$\therefore\ E(A) = (1 - c_A)c_B + c_A(1 - c_B)$$

（３）$c_A = c_B = c$　として

$$E(A) = (1-c)c + c(1-c) = -2\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$\therefore\ c = \dfrac{1}{2}$のとき，$E(A)$は最大となりその値は$\dfrac{1}{2}$

（４）$c_A = c_B = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore$　$g_A + p_A = \dfrac{1}{2}$……①　$g_B + p_B = \dfrac{1}{2}$……②

$$\begin{aligned} E(A) &= \frac{1}{2}g_A + \frac{1}{2}p_B + p_A g_B \\ &= \frac{1}{2}g_A + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - g_B\right) + \left(\frac{1}{2} - g_A\right)g_B \\ &= g_A\left(\frac{1}{2} - g_B\right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ここで$0 < g_A$，$0 < p_A$　故　①より$0 < g_A < \dfrac{1}{2}$

同様に，$0 < g_B < \dfrac{1}{2}$　従って，$0 < \dfrac{1}{2} - g_B < \dfrac{1}{2}$

$\therefore$　$0 < g_A\left(\dfrac{1}{2} - g_B\right) < \dfrac{1}{4}$　$\therefore$　$E(A) < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

従って，Ｂ君が有利　$(\because E(A) + E(B) = 1)$