Ｈ６　京都

１．　$f(x,y)=x^3+2x^2y^7+y^4$として，曲線$f(x,y)=0$は点$(0,0)$を通る$y=g(x)$の陰関数として与えられる。このとき，$g'(1)$を求めよ。

解）

$x^3+2x^2y^7+y^4=0$　でyをxの関数とみなして，両辺をxで微分

$$3x^2+2(2xy^7+7x^2y^6y')+4y^3y'=0$$

$$3x^2+4xy^7+14x^2y^6y'+4y^3y'=0$$

$x=1,\quad y=-1$　を代入して

$$3\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot(-1)^7+14\cdot 1^2\cdot(-1)^6y'_{x=1}+4\cdot(-1)^3\cdot y'_{x=1}=0$$

$$3-4+14y'_{x=1}-4y'_{x=1}=0$$

$$10y'_{x=1}=1 \qquad \therefore\ y'_{x=1}=\frac{1}{10} \quad \therefore\ g'(1)=\frac{1}{10}$$

２．　$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&2&1&0\\0&2&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$に対し，

Aの階数$rank(A)$，固有値，固有ベクトル，対角化せよ。

解）

Aに行列の基本変形を何回かおこなって，

$$A\to\cdots\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\therefore\quad rank(A)=3$$

$$|tE-A|=\begin{vmatrix}t&0&0&-1\\0&t-2&-1&0\\0&-2&t-1&0\\-1&0&0&t\end{vmatrix}=(t+1)t(t-1)(t-3)$$

$\therefore$　Aの固有値は　$-1,0,1,3$

$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}$を固有ベクトルとして$(tE-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}$

$t=-1$のとき，$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$，$t=0$のとき，$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$

$t=1$のとき，$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$t=3$のとき，$\mathbf{v}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$P=(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_1)$とおくと，$P$；正則行列　$(\because\quad rank(P)=4)$

$$AP=P\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\quad 故\quad P^{-1}AP=diag(0,1,3,-1)$$

Ｈ６　京都

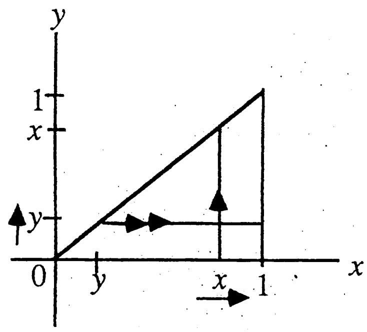
３．　$I=\int_0^1\int_y^1\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dxdy$　を求めよ。

解）

$$I=\int_0^1\left(\int_y^1\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dy\right)dx$$

（積分の順序交換）



$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\left[y\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{2}dt \qquad \left(\begin{array}{l} set\ t=x^2,\quad dt=2xdx\ \therefore\ xdx=\frac{1}{2}dt \\ t:0\to 1\,(x:0\to 1)\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[Sin^{-1}t\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}Sin^{-1}1$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Ｈ６　京都

４．　$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$　を極座標　(r,θ)　でかきかえよ。
いくつかの点をプロットしてこの図形を図示せよ。
解）

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$　を　$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$　に代入

$(r^2)^3=4r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta$

$r^2=(2\sin\theta\cos\theta)^2$

$=(\sin 2\theta)^2 \qquad r^2=\sin^2 2\theta$

$r=\sin 2\theta$

$$\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\pm\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm 2\theta\right)=\cos 2\theta$$

故に$\theta=\dfrac{\pi}{4}$で対称　e. t. c