4月10日

H５東北

1．$f(x)$ は x の多項式で，等式 $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)-f(x-1)=(2x-1)^3 \end{cases}$

を満たす。次の問いに答えよ。

（１）$f(x)$ を求めよ。

（２）次の級数の和を計算せよ。

$(\sin x+1)^3+(\sin x+3)^3+(\sin x+5)^3+\cdots+(\sin x+2n-1)^3$

2．２行２列の行列 $P=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ と $Q=I-P$ について，次の問いに答えよ。ただし，I は２行２列の単位行列である。

（１）P^{-1}が存在する条件を書き，そのときP^{-1}を求めよ。

（２）正の整数nに対して，$Q^n=(p+q)^{n-1}Q$を証明せよ。

（３）$|p+q-1|<1$のとき，$\lim_{n\to\infty}P^n$ を求めよ。

3．放物線

$$y=-\frac{1}{2}x^2+x \cdots\cdots\cdots (*)$$

の上の点$P(a,b)$において，放物線より上側に中心$Q(X,Y)$をもつ半径$\sqrt{(a-1)^2+1}$の円Cが接している。次の問いに答えよ。

（１）円Cの中心Qの座標(X,Y)をaで表せ。

（２）点Pが放物線（＊）上を動くとき，円Cの中心Qが描く曲線の方程式を求めよ。

（３）中心Qが直線$x+2y=6$に最も近づくとき，中心Qの座標(X,Y)を求めよ。

4．滑らかな曲線$y=f(x)$について，次の問いに答えよ。

（１）曲線上の点$P(a,b)$における法線とx軸との交点の座標が$\left(\frac{1}{2}(a+b^2),0\right)$であるとき，関数$y=f(x)$の満たす微分方程式を導け。

（２）（１）の微分方程式を満たし，$(0,2)$を通る曲線の方程式を求めよ。また$-3\leq x\leq 1$においてこの曲線の概形を描け。必要ならば，$e=2.7182\cdots$，$e^{-1}=0.367\cdots$，$e^{-1.5}=0.223\cdots$ を使ってもよい。

H5 東北

(準備)

○ $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

$k=1,2,\cdots\cdots,n$ を代入して加える

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\} = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\cdots\cdots+((n+1)^2-n^2) = 2\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$(n+1)^2-1 = 2\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}\{(n+1)^2-1-n\}$$

$$= \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{rl} & 1+2+\cdots\cdots+n = S \\ +) & n+(n-1)+\cdots\cdots+1 = S \\ \hline & n(n+1) = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) = 2S \end{array}$$

$\therefore S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

○つぎ

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$

$\sum_{k=1}^{n}$ より

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3)}_{(n+1)^3-1} = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - 1 - n - \frac{3n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)\{2(n+1)^2 - 2 - 3n\}}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+4n+2-2-3n)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

○さらに

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4 - k^4\}}_{(n+1)^4 - 1} = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 4\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\{(n+1)^4 \underbrace{-1-n}_{-(n+1)}(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)\}$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)\{(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\}$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)\{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n^2 - n - 2n\}$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)\underbrace{(n^3+n^2)}_{n^2(n+1)} = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)^2}{2}\right\}$$

1. (1) $\begin{cases} f(0) = 0 & \text{—①} \\ f(x) - f(x-1) = (2x-1)^3 & \text{—②} \end{cases}$ $\quad f(x)$：多項式

②に $1, 2, \cdots, n$ を代入

$$\cancel{f(1)} - \overset{0}{f(0)} = (2\cdot1-1)^3$$
$$f(2) - \cancel{f(1)} = (2\cdot2-1)^3$$
$$\vdots$$
$$+)\ f(n) - f(n-1) = (2\cdot n-1)^3$$
$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$$

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)$$
$$= 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 8\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - 12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n$$
$$= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n$$
$$= 2n^2(n^2+2n+1) - 2n(2n^2+3n+1) + 3n^2+3n-n$$
$$= 2n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n^3 - 6n^2 - 2n + 3n^2 + 3n - n$$

$= 2n^4 - \underline{n^2}$

そこで $f(x) = 2x^4 - x^2$ と予想

$f(0) = 0$ 故 ①は O.K.

つぎ、

$$f(x) - f(x-1) = 2x^4 - x^2 - \{2(x-1)^4 - (x-1)^2\}$$

$$= 2\underbrace{\{x^4 - (x-1)^4\}}_{\{x^2+(x-1)^2\}\{x^2-(x-1)^2\}} - \{x^2 - (x-1)^2\}$$

$$= \{x^2 - (x-1)^2\}[2\{x^2 + (x-1)^2\} - 1]$$

$$= \{x + x - 1\}\underbrace{\{x - (x-1)\}}_{1}\{2(2x^2 - 2x + 1) - 1\}$$

$$= (2x-1)(4x^2 - 4x + 1)$$

$$= (2x-1)(2x-1)^2 = (2x-1)^3$$

従って②もみたされる

以上より、求める $f(x)$ は $f(x) = 2x^4 - x^2$ //

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\sin x + 2k - 1)^3$

$$= \sum_{k=1}^{n}\{\sin^3 x + 3(\sin^2 x)(2k-1) + 3(\sin x)(2k-1)^2 + (2k-1)^3\} \text{——} (*)$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ —— ①

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$=\frac{n}{3}\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}$$
$$=\frac{n}{3}\{4n^2+6n+2-6n-6+3\}$$
$$=\frac{n}{3}\{4n^2-1\} \text{ ——② }$$

(1)の解答中より $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=2n^4-n^2$ ——③

①,②,③を(*)に代入

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin x+2k-1)^3$$
$$=n\sin^3 x+3n^2\sin^2 x+n^2(4n^2-1)\sin x+2n^4-n^2 \,/\!/$$

2. $P=\begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix}$ $Q=I-P$ $=\begin{pmatrix}p & -p\\ -q & q\end{pmatrix}$

$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1=|\underset{(I)}{E}|=|A\cdot A^{-1}|=|A||A^{-1}| \\ \therefore |A|\neq 0\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \\ A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\end{array}}$$

(1) $0\neq|P|=(1-p)(1-q)-pq=1-p-q$

そして $1-p-q\neq 0$ のとき

$$P^{-1}=\frac{1}{1-p-q}\begin{pmatrix}1-q & -p\\ -q & 1-p\end{pmatrix} \,/\!/$$

(2) $Q^n=(p+q)^{n-1}Q$

$\because)$ $Q^2=\begin{pmatrix}p & -p\\ -q & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & -p\\ -q & q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p(p+q) & -p(p+q)\\ -q(p+q) & q(p+q)\end{pmatrix}$

$$=(p+q)\begin{pmatrix}p & -p\\ -q & q\end{pmatrix}=(p+q)Q$$

$$Q^3 = (p+q)Q^2 = (p+q)(p+q)Q = (p+q)^2 Q$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Q^n = (p+q)^{n-1} Q$$

(3) $|p+q-1| \leq 1$ のとき $\lim_{n \to \infty} P^n$

先ず $p+q \neq 0$ (もし $p+q=0$ なら $1<1$ となり矛盾)

$P = I - Q$ で $IQ = Q = QI$、故に二項定理が使えて

$$P^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k I^{n-k} (-Q)^k$$

$$= I + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k (-1)^k Q^k$$

$$= I - \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k (-1)^{k-1} \underset{(p+q)^{k-1}Q}{\underset{\shortparallel}{Q^k}}$$

$A, B : n \times n$
$AB = BA$ のとき
$(A+B)^r$
$= \sum_{k=0}^{r} {}_rC_k A^{r-k} B^k$

$$= I - Q \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k (-1)^{k-1} (p+q)^{k-1}$$

$$= I - (p+q)^{-1}Q - \left[-(p+q)^{-1}Q + Q \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \{-(p+q)\}^{k-1} \right]$$

$$= I - (p+q)^{-1}Q - \{-(p+q)^{-1}Q\} \left[\underset{{}_nC_0 1^n}{\underset{\uparrow}{1}} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \{-(p+q)\}^k \right]$$

$$= \underbrace{I - (p+q)^{-1}Q}_{\text{残ってくる}} - \{-(p+q)^{-1}Q\} \underset{\{1-(p+q)\}^n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0}{\underset{\shortparallel}{\left[\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k 1^{n-k} \cdot \{-(p+q)\}^k \right]}}$$

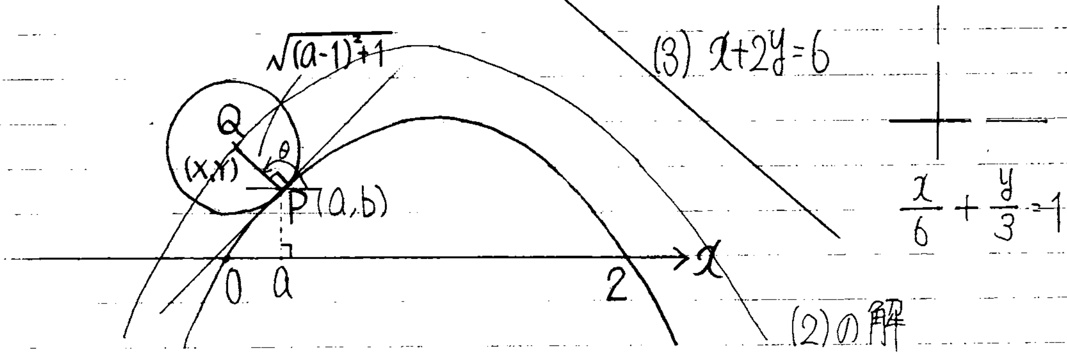
↓つづく

No. 7 Date 4.24.後

以上より

$$P^n \to I-(p+q)^{-1}Q$$ //

3, $y=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}x(x-2)$ …… (*)



(1) Pでの(*)の接線

$$y-b=(-a+1)(x-a) \quad , \quad b=-\frac{1}{2}a^2+a$$

$$y=(1-a)x-a(1-a)-\frac{1}{2}a^2+a$$

$$=(1-a)x+\frac{1}{2}a^2$$

Pでの法線は

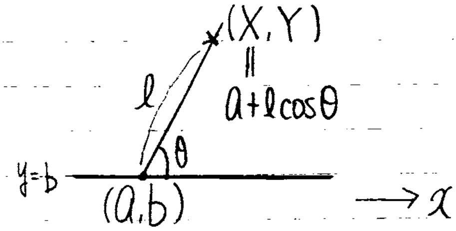
$mm'=-1$

$$y-b=\frac{1}{a-1}(x-a)$$

傾き $\tan\theta=\frac{1}{a-1}$ $(0\leqq\theta<\pi)$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{\frac{1}{1+(\frac{1}{a-1})^2}}=\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+1}}$$ $\left(\because 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$

$$\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{(a-1)^2+1}}$$



すると

$$X = a+\sqrt{(a-1)^2+1}\cdot\cos\theta$$

$$= a + a+1 = 2a+1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}(X+1)$$

$$Y = b+\sqrt{(a-1)^2+1}\cdot\sin\theta$$

$$= b+1 = -\frac{1}{2}a^2+a+1$$

(2) $$Y = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(X+1)\right\}^2+\frac{1}{2}(X+1)+1$$

$$= -\frac{1}{8}(X+1)^2+\frac{1}{2}(X+1)+1$$

$$= -\frac{1}{8}\{(X+1)^2-4(X+1)-8\}$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\{(X+1)-2\}^2-4-8\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\{(X-1)^2-12\}$$

$$= -\frac{1}{8}(X-1)^2+\frac{3}{2}$$

(3) $x+2y=6$ に平行な直線が

$$y = -\frac{1}{8}(X-1)^2+\frac{3}{2}$$

に接する点が求める $Q(X,Y)$

$x+2y=6$ の傾きは $-\frac{1}{2}$

一方 $y = -\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{3}{2}$ を微分

No. 9 Date 4.24.後

$$y' = -\frac{1}{4}(x-1)$$

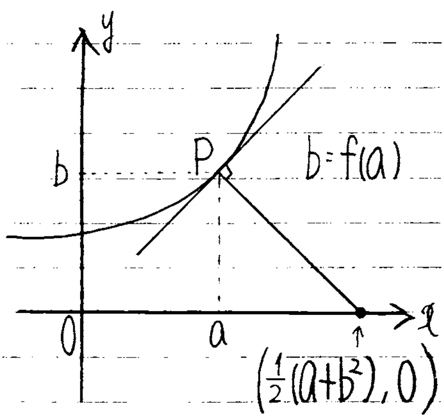
$$\therefore -\frac{1}{4}(x-1) = -\frac{1}{2}$$

$$x-1 = 2 \qquad \therefore x = 3$$

$$y = -\frac{1}{8}(3-1)^2 + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$\therefore Q(X, Y) = (3, 1)$$



4. (1) $y = f(x)$ $\quad$ $P(a, b)$

$y - b = f'(a)(x-a)$: Pでの接線

$y - b = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ — (*) : Pでの法線

(*)で $y=0$ として

$$bf'(a) = x - a \qquad \therefore x = a + f(a)f'(a) = \frac{1}{2}(a + f(a)^2)$$

$$2f(a)f'(a) + 2a = f(a)^2 + a$$

$$2f(a)f'(a) - f(a)^2 = -a$$

$2yy' - y^2 = -x$: 求める微分方程式

(2) $z = y^2$, $z' = 2yy'$

$$z' - z = -x$$

$$z = e^{-\int(-1)dx}\left[\int(-x)e^{\int(-1)dx}dx + C\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + py = q \\ \quad\Downarrow \\ y = e^{-\int p dx}\left[\int q e^{\int p dx} dx + C\right] \end{array}}$$

$$z = e^{-\int(-1)dx}\left[\int(-x)e^{\int(-1)dx}\,dx + C\right]$$

$$= e^{\int dx}\left[-\int x e^{-\int dx}\,dx + C\right]$$

$$= e^{x}\left[\underline{-\int x e^{-x}\,dx} + C\right]$$

$$\int x(e^{-x})'\,dx = x e^{-x} - \int e^{-x}\,dx$$

$$= x e^{-x} + e^{-x}$$

$$= e^{x}\left[x e^{-x} + e^{-x} + c\right]$$

$$y^2 = z = x + 1 + Ce^{x}$$

$$y(0) = 2$$

$$z(0) = y(0)^2 = 4$$

$$4 = 0 + 1 + C$$

$$\therefore C = 3$$

$$\therefore y = \sqrt{1 + x + 3e^{x}}$$

$$1 + x + 3e^{x} < 0$$

$$(x = -3)$$