［９２］Ｈ５大阪(工)

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin(\alpha x+\omega t)+\sin(\alpha x-\omega t)\}dx=f(\alpha)\cos\omega t$$ で

（１） $f(\alpha)$を求めよ。

（２） $\lim_{\alpha\to 0}f(\alpha)$ を求めよ。

解)

（１） $\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin(\alpha x+\omega t)+\sin(\alpha x-\omega t)\}dx$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\alpha x\cos\omega t)dx=\left(\frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha x dx\right)\cos\omega t$$

$$\therefore\quad f(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha x dx$$

$$=\frac{2}{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\alpha^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)$$

$$=\frac{2}{\alpha^2}\left(1-\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{2}{\alpha^2}\left\{1-\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{4}\alpha\right)\right\}$$

$$=\frac{4}{\alpha^2}\sin^2\frac{\pi}{4}\alpha$$

$$=4\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\alpha}{\frac{\pi}{4}\alpha}\right)^2\frac{1}{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}=\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\alpha}{\frac{\pi}{4}\alpha}\right)^2$$

（２） $\lim_{\alpha\to 0}f(\alpha)=\frac{\pi^2}{4}\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\alpha}{\frac{\pi}{4}\alpha}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}$

参考；$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

［９３］Ｈ５大阪（工）

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}=\frac{p}{x-\alpha}+\frac{q}{x-\beta}+\frac{r}{x-\gamma}$$

で，p, q, r が一意的に決まるための条件を求めよ。

解）

両辺に　$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$　をかけて整理すると

$$ax^2+bx+c=(p+q+r)x^2-\{p(\beta+\gamma)+q(\alpha+\gamma)+r(\alpha+\beta)\}x$$
$$+p\beta\gamma+q\alpha\gamma+r\alpha\beta \quad (x\text{の恒等式})$$

$$p+q+r=a\cdots\cdots\cdots①$$
$$p(\beta+\gamma)+q(\alpha+\gamma)+r(\alpha+\beta)=-b\cdots\cdots②$$
$$p\beta\gamma+q\alpha\gamma+r\alpha\beta=c\cdots\cdots\cdots③$$

p,q,r が一意的に決まるためには

$$0\neq\begin{vmatrix}1&1&1\\\beta+\gamma&\alpha+\gamma&\alpha+\beta\\\beta\gamma&\alpha\gamma&\alpha\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\\beta+\gamma&\alpha-\beta&\alpha-\gamma\\\beta\gamma&\gamma(\alpha-\beta)&\beta(\alpha-\gamma)\end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$=\begin{vmatrix}\alpha-\beta&\alpha-\gamma\\\gamma(\alpha-\beta)&\beta(\alpha-\gamma)\end{vmatrix}=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\begin{vmatrix}1&1\\\gamma&\beta\end{vmatrix}$$
$$=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$$
$$\therefore\quad(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\neq0$$

参考；クラーメルの公式

［９４］Ｈ５大阪(工)

$x^2+y^2=1$　と　$y=ax^2+b$　が交わっている。このとき (a,b) の動く領域を図示せよ。

解)

$x^2+y^2=1$……①　　　$y=ax^2+b$……②

①，②より　x^2を消去して整理すると，$ay^2+y-(a+b)=0$……③

③　が実数解ををもつ。$a\neq 0$のとき，判別式≥ 0

$\therefore\ \ 4a(a+b)\geq -1$……④

$0<a$　のとき，④の両辺を$4a$でわって整理すると

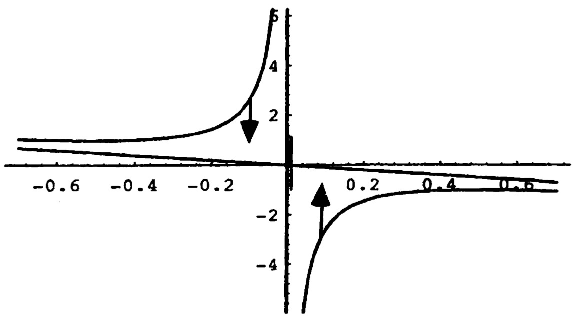
$$-\left(\frac{1}{4a}+a\right)\geq b \cdots\cdots ⑤$$

$a<0$　のとき，④の両辺を$4a(<0)$でわって整理すると

$$b\leq -\left(\frac{1}{4a}+a\right)\cdots\cdots ⑥$$

$a=0$　のとき，②は　$y=b$　となり　$-1\leq b\leq 1\ (a=0)$……⑦

⑤，⑥，⑦　を図示し，まとめると



[９５] Ｈ５大阪（工）

１～５番までの数字のカードを続けて２回復元抽出し，順に十位，一位の数とし二桁の整数を作る。

（１） ２の倍数になる確率を求めよ。
（２） ３の倍数になる確率を求めよ。
（３） ６の倍数になる確率を求めよ。
（４） ２の倍数がでる事象と３の倍数がでる事象は独立といえるか。

解）
１１から５５まで２５通りの整数が考えられる。
{11，12，13，14，15，21，22，23，24，25，．．．51，52，53，54，55}

（１）
A_2；２の倍数になる事象とすると，
$A_2=\{12,22,32,42,52,14,24,34,44,54\}$の10通り

$$\therefore\quad P(A_2)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

（２）
A_3；３の倍数になる事象とすると，
$A_3=\{12,15,21,24,33,42,45,54\}$の９通り

$$\therefore\quad P(A_3)=\frac{9}{25}$$

（３）
A_6；６の倍数になる事象とすると，
$A_6=\{12,24,42,54\}$；４通り

$$\therefore\quad P(A_6)=\frac{4}{25}$$

（４） $A_6=A_2\cap A_3 \qquad \therefore\quad P(A_2\cap A_3)=P(A_6)=\dfrac{4}{25}$

一方，$P(A_2)P(A_3)=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{9}{25} \qquad \therefore\quad P(A_2\cap A_3)\neq P(A_2)P(A_3)$

$\therefore$ A_2とA_3は独立とはいえない。