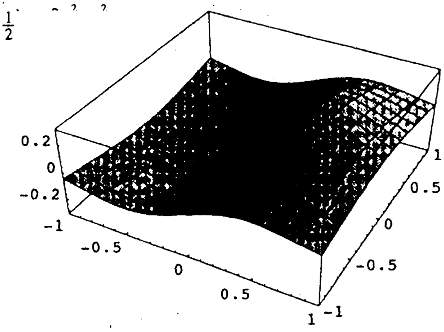
Ｈ４　京都

１．　次の２変数関数 $f(x,y)$ の $\mathbf{R}^2$ 全体での最大値，最小値を求めよ。

$$f(x,y)=xe^{-2x^2-y^2}$$

解）$f_x=(1-4x^2)e^{-2x^2-y^2}=-4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}$



$f_y=-2xye^{-2x^2-y^2}$

$f_{xx}=4x(4x^2-3)e^{-2x^2-y^2}$

$f_{yy}=2x(2y-1)e^{-2x^2-y^2}$

$f_x=0$　より　$x=\pm\dfrac{1}{2}$

特に，$x\neq 0$　$f_y=0$　より　$xy=0$

$\therefore$　$y=0$

以上より　$(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},0\right)$

$A=f_{xx}$　$B=f_{xy}$　$C=f_{yy}$　$D=B^2-AC$

$D=4y^2(4x^2-1)^2e^{-4x^2-2y^2}-8x^2(4x^2-3)(2y-1)e^{-4x^2-2y^2}$　だから

$(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},0\right)$ のとき，$D=0-8\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(4\cdot\dfrac{1}{4}-3\right)e^{-4\cdot\frac{1}{4}-0}=-4e^{-1}<0$

従って，$(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},0\right)$ で $f(x,y)$ は極値をとる。

$(x,y)=(\frac{1}{2},0)$　のとき，$f_{xx}=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(4\cdot\dfrac{1}{2}-3\right)e^{-2\cdot\frac{1}{4}-0}<0$

$\therefore$　f は最大値 $f(\frac{1}{2},0)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ をとる。

$(x,y)=(-\frac{1}{2},0)$　のとき，$f_{xx}=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(4\cdot\dfrac{1}{4}-3\right)e^{-2\cdot\frac{1}{4}-0}>0$

$\therefore$　f は最小値 $f(-\frac{1}{2},0)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ をとる。

Ｈ４　京都

２．　$A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 & 0 \\ -5 & 16 & 14 & 0 \\ 6 & -18 & -16 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$に対し

（１）Aの階数を求めよ。

（２）Aの固有値，固有ベクトルを求めよ。

（３）$P^{-1}AP$が対角行列になる正則行列Pを求めよ。

解）

（１）$A \to$（行列の基本変形）$\cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$rank(A)=3$

（２）$|tE-A|=\begin{vmatrix} t-3 & 6 & 6 & 0 \\ 5 & t-16 & -14 & 0 \\ -6 & 18 & t+16 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & t-2 \end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix} t-3 & 6 & 6 \\ 5 & t-16 & -14 \\ -6 & 18 & t+16 \end{vmatrix}$ $\times 1$

$=(t-2)\begin{vmatrix} t-3 & 6 & 6 \\ 5 & t-16 & -14 \\ -1 & t+2 & t+2 \end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix} t-3 & 0 & 6 \\ 5 & t-2 & -14 \\ -1 & 0 & t+2 \end{vmatrix}$

$\times(-1)$

$=(t-2)^2\begin{vmatrix} t-3 & 6 \\ -1 & t+2 \end{vmatrix}$（２列目展開）

$=(t-2)^2\{(t-3)(t+2)+6\}=(t-2)^2t(t-1)$　$\therefore A$の固有値$=0,1,2$

$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$固有ベクトル　とすると，$(tE-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}$　$(\mathbf{v}\neq\mathbf{0})$

$t=0$のとき，$\mathbf{v}_0=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，$t=1$のとき，$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$t=2$のとき，$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \\ u \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，それで$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2'=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（３）$P=(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2')$とおくと$P^{-1}AP=diag(0,1,2,2)$

Ｈ４　京都

３．　曲面Sを次のように定義する。

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \le 0\right\}$$

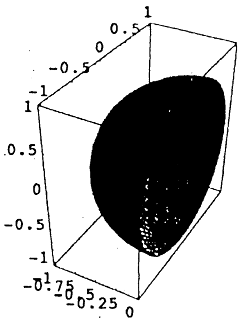
$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ; y^2 + z^2 = a^2, 0 \le x \le b\right\}$$

$$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ; (x-b)^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \le b\right\}$$

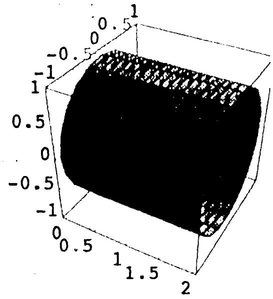
このとき，次の面積分を求めよ。

$$\iint_S (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

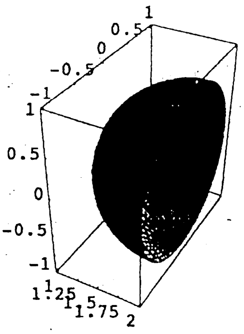
解）



S_1



S_2



$V = \left\{(x,y,z); -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \le x \le b - \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right\}$とおくと

$\partial V = S$; Vの縁

$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$　　とおくと，

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy$$
$$= dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz = 3dx \wedge dy \wedge dz$$

$Stokes$の定理より

$$\iint_S \omega = \iint_{\partial V} \omega = \iiint_V d\omega = 3\iiint_V dx \wedge dy \wedge dz$$
$$= 3\times（V\text{の体積}）$$
$$= 3\times\left\{(x,y,z); y^2 + z^2 \le a^2 (0 \le x \le b)\right\}\text{の体積}$$
$$= 3\pi a^2 b$$