[９６] Ｈ３大阪（工）

（１） P，A，Bが正則行列で$P=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$と表せるとする。

A．Bが正則行列のとき，Pも正則行列であることを示し，P^{-1}を求めよ。

（２） $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$が正則行列であることを示し，$P^{-1}$を求めよ。

解）

（１） $|P|=|A||B|\neq 0$ （∵ 仮定より，$|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$）

$P^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ U & Z \end{pmatrix}$とおく

$\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}=PP^{-1}=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ U & Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX+CU & AY+CZ \\ BU & BZ \end{pmatrix}$

$\therefore AX+CU=E\cdots$①，$AY+CZ=O\cdots$②，$BU=O\cdots$③，$BZ=E\cdots$④

$B^{-1}\times$③，$B^{-1}\times$④より　$U=O\cdots$⑤，$Z=B^{-1}\cdots$⑥

①，⑤より，$AX=E$，$A^{-1}\times$ より，$Y=A^{-1}\cdots$⑦

②，⑥より，$AY=CB^{-1}$，$A^{-1}\times$ より $Y=-A^{-1}CB^{-1}\cdots$⑧

⑤～⑧より，$P^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$と予想される。

実際，$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}=E$

（２） $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと$P=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$

$|A|=-1$，$|B|=1$　$\therefore A,B$；正則行列　∴ （１）よりP；正則行列

$A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$-A^{-1}CB^{-1}=-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

（１）より，$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

5月15日

［９７］Ｈ３大阪（工）

（１）$I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n x\,dx$に対して

$$(m+n)I_{m,n}=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)I_{m-2,n}$$
$$=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{m,n-2}$$ を示せ。

（２）$2\leq n$のとき，$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$　を求めよ。

解）

（１）
$$I_{m,n}=\int \sin^{m-1}x\cos^n x\sin x\,dx=-\int \sin^{m-1}x\left(\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}\right)'dx$$
$$=-\sin^{m-1}x\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\cos x\cos^{n+1}x\,dx$$
$$=-\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\left(1-\sin^2 x\right)\cos^n x\,dx$$
$$=-\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\left(I_{m-2,n}-I_{m,n}\right)$$
$$\therefore (m+n)I_{m,n}=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)I_{m-2,n}-(m-1)I_{m,n}$$
$$\therefore (m+n)I_{m,n}=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)I_{m-2,n}$$

同様に，

$$I_{m,n}=\int \sin^m x\cos x\cos^{n-1}x\,dx=\int\left(\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\right)'\cos^{n-1}x\,dx$$
$$=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x-\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+1}x\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$$
$$=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\left(1-\cos^2 x\right)dx$$
$$=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\left(I_{m,n-2}-I_{m,n}\right)$$
$$\therefore (m+n)I_{m,n}=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{m,n-2}$$

（２）（１）の後半で$m=0$として

$$nI_{0,n}=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{0,n-2}$$

$[\ ]_0^{\frac{\pi}{2}}$として，$J_n=\left[I_{0,n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$より，$nJ_n=(n-1)J_{n-2}$

$$\therefore\quad J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

さらに，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$,　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$　より

$$J_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} & (n\,;even)\\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3} & (n;odd)\end{cases}$$

[９８] Ｈ３大阪（工）

曲線群　$y^2 = 2a(x-9)$　$(a \neq 0)$　に対し

（１）この曲線群を与える微分方程式を導け。

（２）この曲線群に直交する曲線の方程式を求めよ。

解)

（１）　（＊）$y^2 = 2a(x-9)$　　をxで微分して

$2yy' = 2a$　　$\therefore$　$a = yy'$　これを（＊）に代入して

$y^2 = 2yy'(x-9)$　$\therefore$　$y = 2y'(x-9)$

（２）直交する曲線群は　微分方程式

（＃）$y = -2\dfrac{1}{y'}(x-9)$

を満たす。

$$yy' + 2(x-9) = 0 \qquad \left(\frac{1}{2}y^2\right)' + \left((x-9)^2\right)' = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}y^2 + (x-9)^2 = c^2 \quad (c > 0)$$

$$\therefore \quad \frac{y^2}{(\sqrt{2}c)^2} + \frac{(x-9)^2}{c^2} = 1 \quad \text{(楕円)}$$

参考；曲線群　$f(x, y, y') = 0$　に対してこの群に直交する曲線は

$f\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0$を満たす。

5P 15P

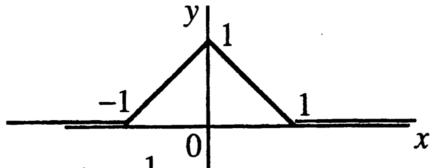
[99] H3大阪（工）

確率密度関数を　$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\le 1)\\ 0 & (1<|x|)\end{cases}$　で定義する。

（1）確率分布関数 $F(x)=P(X\le x)$ を求めて，$y=F(x)$ のグラフの概形をかけ。

（2）平均 μ　分散 σ^2　を求めよ。

（3）$P\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma\le X\le\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma\right)$ を求めよ。但し σ は標準偏差



解）

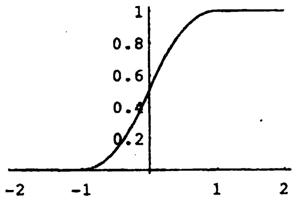
（1）$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$(x\le -1)=0$

$(-1\le x\le 0)=\int_{-1}^{x}(1+t)dt=\frac{1}{2}\left[(1+t)^2\right]_{-1}^{x}=\frac{1}{2}(1+x)^2$

$(0\le x\le 1)=\frac{1}{2}+\int_{0}^{x}(1-t)dt=-\frac{1}{2}\left[(1-t)^2\right]_{0}^{x}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

$(1\le x)=1$



（2）$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=0$

（$\because x$；奇関数，$f(x)$；偶関数　$\therefore xf(x)$；奇関数）

$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=2\int_{0}^{\infty}x^2f(x)dx$

（$\because x^2f(x)$；偶関数）

$=2\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=2\left\{\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1\right\}=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$

（3）$\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$　　$\left(\because \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\therefore P\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma\le X\le\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma\right)=P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx$

$=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x)dx=-\left[(1-x)^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

（$\because f(x)$；偶関数）