［７６］Ｈ３大阪（基礎工）

（１）$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha < 1$となる$\alpha$があるとき

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$　は収束することを示せ。ただし，$a_n > 0$

（２）$1 + \dfrac{2!}{2^2} + \dfrac{3!}{3^3} + \cdots + \dfrac{n!}{n^n} + \cdots$　は収束するかどうか理由をつけて示せ。

解）

（１）$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$とおく。$S_n > 0$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha \quad \therefore \quad a_{k+1} \leq \alpha a_k$

$\therefore a_2 \leq \alpha a_1,\quad a_3 \leq \alpha a_2 \leq \alpha^2 a_1, \cdots, a_n \leq \alpha^{n-1} a$

$$\therefore \quad S_{n+} \leq a_1 + \alpha a_1 + \cdots + \alpha^{n-1} a_1 = \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}\right) a_1$$

$$= \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} a_1 < \frac{1}{1-\alpha} a_1$$

さらに，$S_n - S_{n-1} = a_n > 0 \quad \therefore \quad S_{n-1} < S_n$

「上に有界な単調増加数列は収束する。」より

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$は収束　　$\therefore \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$　は収束

（２）$a_n = \dfrac{n!}{n^n}$　とおく

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

ここで，$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \dfrac{1}{n} + \dfrac{n \cdot (n-1)}{2!} \dfrac{1}{n^2} + \cdots + n^n$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + n^n > 2 \quad (2 \leq n)$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

従って，（１）より$\alpha = \dfrac{1}{2}$と考えて

$1 + \dfrac{2!}{2^2} + \dfrac{3!}{3^3} + \cdots + \dfrac{n!}{n^n} + \cdots$は収束

[77] H3大阪（基礎工）

$$B_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad B_2=(\cos\theta\quad \sin\theta),\quad C_1=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix},\quad C_2=(-\sin\theta\quad \cos\theta)$$

として，$A=aB_1B_2+bC_1C_2$で表される行列について

（1）A^nを$a, b, \sin\theta, \cos\theta$を用いて簡単な形で表せ。

（2）Aの逆行列A^{-1}を$a, b, \sin\theta, \cos\theta$を用いて表せ。

解)

（1）$A=aB_1B_2+bC_1C_2$

$$=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}(\cos\theta\quad \sin\theta)+b\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}(-\sin\theta\quad \cos\theta)$$

$$=\begin{pmatrix}a\cos^2\theta+b\sin^2\theta & (a-b)\sin\theta\cos\theta\\ (a-b)\sin\theta\cos\theta & a\sin^2\theta+b\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

nに関する数学的帰納法で

$$A^n=\begin{pmatrix}a^n\cos^2\theta+b^n\sin^2\theta & (a^n-b^n)\sin\theta\cos\theta\\ (a^n-b^n)\sin\theta\cos\theta & a^n\sin^2\theta+b^n\cos^2\theta\end{pmatrix}\cdots (*)$$

が示される。（各自）

(2) $|A|=(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)-(a-b)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$=a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\cos^2\theta+ab(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$$
$$-(a^2-2ab+b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=ab(\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$$

$=ab(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=ab$　　題意より $ab\neq 0$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{ab}\begin{pmatrix}a\sin^2\theta+b\cos^2\theta & -(a-b)\sin\theta\cos\theta\\ -(a-b)\sin\theta\cos\theta & a\cos^2\theta+b\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^{-1}\cos^2\theta+b^{-1}\sin^2\theta & (a^{-1}-b^{-1})\sin\theta\cos\theta\\ (a^{-1}-b^{-1})\sin\theta\cos\theta & a^{-1}\sin^2\theta+b^{-1}\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

これは（＊）で$n=-1$を示している。

［７８］Ｈ３大阪（基礎工）

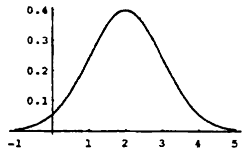
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}$$ について

（１） $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ を示せ。

（２） $y=\{f(x)\}^2$ と x 軸とでできる図形を $x=\mu$ を軸として回転したときの回転体の体積を求めよ。

解）

（１）
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right)dx$$



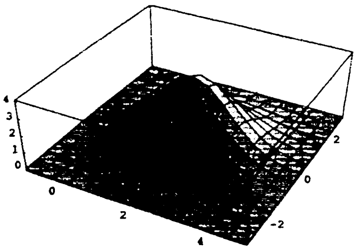
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2)\sqrt{2}dt \quad \left(set \quad t=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\exp(-t^2)dt \quad (\because \exp(-t^2)；t\text{の偶関数})$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

（２） $y=\{f(x)\}^2=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-(x-\mu)^2\right)\cdots\cdots①$

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2\pi}}(x-\mu)^2dy\cdots\cdots②$$

①より $(x-\mu)^2=-\log 2\pi y$

$$\therefore \quad V=-\pi\int_0^{\frac{1}{2\pi}}\log 2\pi y\,dy$$
$$=-\pi\int_0^1\log t\cdot\frac{1}{2\pi}dt \quad (set \quad t=2\pi y)$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\log t\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(t)'\log t\,dt$$



$$=-\frac{1}{2}\left\{[t\log t]_0^1-\int_0^1 t(\log t)'dt\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{0-0-\int_0^1 dt\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{-[t]_0^1\right\}=\frac{1}{2}$$

$$\because) \quad \lim_{t\to 0}t\log t=\lim_{t\to 0}\frac{\log t}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=-\lim_{t\to 0}t=0$$

（∵ ロピタル）

5月1日

[79] H3大阪（基礎工）

（1）$1,2,\cdots,30$　の整数の中から4つの数を取りだし，その合計が3の倍数になるような組み合わせは何通りあるか。

（2）整数$n\geq 4$に対して，$2\leq k\leq n-2$であるような整数kを定める。
$1,2,\cdots,n$による順列の中で$1,2,\cdots,k$をその中にこの順のまま含む順列と$k+1,k+2,\cdots,n$をこの順のまま含む順列を除いたものは何通りあるか。

解）

（1）3でわって余りが0，1，2の集合をR_0，R_1，R_2とする。

$R_0=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

$R_1=\{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$

$R_2=\{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$

$x_i^{(j)}\in R_i\ (j=1,2,\cdots)\quad (i=1,2,3)$とする。考えられるのは

$\left\{x_0^{(1)},x_0^{(2)},x_0^{(3)},x_0^{(4)}\right\}\cdots$（i）　$\left\{x_0^{(1)},x_1^{(1)},x_1^{(2)},x_0^{(3)}\right\}\cdots$（ii）

$\left\{x_0^{(1)},x_0^{(2)},x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right\}\cdots$（iii）　$\left\{x_0^{(1)},x_2^{(1)},x_2^{(2)},x_2^{(3)}\right\}\cdots$（iv）

$\left\{x_1^{(1)},x_1^{(2)},x_2^{(1)},x_2^{(2)}\right\}\cdots$（v）　の5つの場合

（i）$\cdots {}_{10}C_4=210$　（ii）$\cdots {}_{10}C_1\times{}_{10}C_3=1200$

（iii）$\cdots {}_{10}C_2\times{}_{10}C_1\times{}_{10}C_1=4500$　（iv）$\cdots {}_{10}C_1\times{}_{10}C_3=1200$

（v）$\cdots {}_{10}C_2\times{}_{10}C_2=2025$

$210+1200+4500+1200+2025=9135$（通り）

（2）　$(1,2,\cdots,k)$をそのまま含む順列はこれを1つとみなし，残り$(n-k)$個と計$(n-k+1)$個の順列　$(n-k+1)!$。

$(k+1,k+2,\cdots,n)$をそのまま含む順列も同様にして　$(k+1)!$

この中に$(1,2,\cdots,k,k+1,\cdots,n)$と$(k+1,\cdots,n,1,2,\cdots,k)$が2度づつ数えられているから$(1,2,\cdots,k)$をそのまま含む順列と$(k+1,k+2,\cdots,n)$をそのまま含む順列の個数は

$(n-k+1)!+(k+1)!-2$

全体の順列の個数は　$n!$

$\therefore\quad n!-\left\{(n-k+1)!+(k+1)!-2\right\}$（通り）