[１０６] Ｈ１大阪（工）

$a_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおくとき，

（１）$\dfrac{1}{n}\log\dfrac{1}{n}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x dx<\log a_n<\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x dx$ $(n=2,3,\cdots)$を示せ。

（２）a_nが収束することを示し，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

（３）$n^n e^{-n}e<n!<n^{n+1}e^{-n}e$を証明せよ。

解）

（１）$\log a_n=\dfrac{1}{n}\log n!-\log n=\dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\log k-n\log n\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log k-\log n)$

$=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\dfrac{k}{n}\cdots\cdots$①

$\log\dfrac{k}{n}<\log x<\log\dfrac{k+1}{n}$ $\left(\dfrac{k}{n}<x<\dfrac{k+1}{n}\right)$ （$\because$ $\log x$；単調増加）

辺辺$\dfrac{k}{n}$から$\dfrac{k+1}{n}$まで積分して，

$\dfrac{1}{n}\log\dfrac{k}{n}<\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\log x dx<\dfrac{1}{n}\log\dfrac{k+1}{n}$，前半の不等式を②，後半の不等式を③とする。③で，$k=1,2,\cdots,(n-1)$として和をとると，

$\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}+\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}}+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}\right)\log x dx<\dfrac{1}{n}\left(\log\dfrac{2}{n}+\log\dfrac{3}{n}+\cdots+\log\dfrac{n}{n}\right)$

両辺に $\dfrac{1}{n}\log\dfrac{1}{n}$ を加えて，①より

$\dfrac{1}{n}\log\dfrac{1}{n}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x dx<\log a_n\cdots\cdots$④

②で，$k=1,2,\cdots,(n-1)$として和をとり，両辺に，$\dfrac{1}{n}\log\dfrac{n}{n}=0$を加えて

$\log a_n<\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x dx\cdots\cdots$⑤

（２）$\int\log x dx=x\log x-x$ だから，（１）より

$-1+\dfrac{1}{n}<\log a_n<-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\log n$

$n\to\infty$として，$-1\leq\lim_{n\to\infty}a_n\leq-1$ $\therefore$ $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-1}$

（$\because\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1}=0$ （$\because$ ロピタル） $\therefore\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log n=0$）

（３）（２）より$-1+\dfrac{1}{n}<\log a_n<-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\log n$

eの肩にのせて，

$e^{-1}e^{\frac{1}{n}}<\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}<e^{-1}e^{\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n}\log n}$

$ne^{-1}e^{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{n!}<ne^{-1}e^{\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n}\log n}$ n乗して，

$n^n e^{-n}e<n!<n^n e^{-n}ee^{\log n}$

$n^n e^{-n}e<n!<n^{n+1}e^{-n}e$ （$\because$ $e^{\log n}=n$）

［１０７］Ｈ１大阪(工)

白球$2N$，赤球１個入っている袋がある。独立試行をn回行って，赤をm回出す確率を$P_{m,n}$とする。

（１）$P_{1,n}$を求めよ。

（２）$\lim_{n\to\infty} P_{1,n}$を求めよ。

（３）$\dfrac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}$を求めよ。

（４）$\lim_{n\to\infty}\dfrac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}$を求めよ。

参考；１回の試行で事象Aが起こる確率をpとして，n回の独立試行でAがm回起こる確率は${}_nC_m p^m q^{n-m}$，$(p+q=1)$

解)

$$P_{m,n} = {}_nC_m\left(\frac{1}{2N+1}\right)^m\left(\frac{2N}{2N+1}\right)^{n-m}$$

（１）$$P_{1,n} = {}_nC_1\left(\frac{1}{2N+1}\right)\left(\frac{2N}{2N+1}\right)^{n-1} = \frac{2^{n-1}nN^{n-1}}{(2N+1)^n}$$

（２）$$\begin{aligned} P_{1,n} &= \frac{1}{2N+1}\cdot\frac{2N+1}{2N}\cdot n\cdot\left(\frac{2N}{2N+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{2N}\cdot n\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2N}}\right)^n \\ &= \frac{1}{2N}\cdot\frac{n}{1+n\frac{1}{2N}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2N}\right)^2+\cdots} \\ &< \frac{1}{2N}\cdot\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2N}\right)^2} = 4N\frac{1}{n-1}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P_{1,n}=0$$

（３）$$\begin{aligned} \frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} &= \frac{{}_nC_{m+1}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^{m+1}\left(\frac{2N}{2N+1}\right)^{n-m-1}}{{}_nC_m\left(\frac{1}{2N+1}\right)^m\left(\frac{2N}{2N+1}\right)^{n-m}} \\ &= \frac{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}}\cdot\frac{1\cdot(2N+1)}{(2N+1)\cdot 2N} \\ &= \frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{1}{2N} \end{aligned}$$

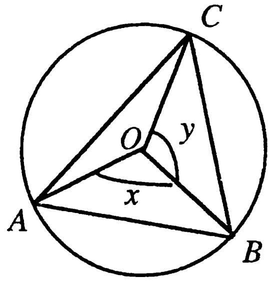
（４）$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{1}{2N} = \infty$$

5月22日

［１０４］Ｈ１大阪（工）

円に内接する三角形で面積が最大となるのは正三角形のときであることを示せ。

解）$x=\angle AOB$，$y=\angle BOC$，a；半径（図）



とするとき，$\Delta OAB=\dfrac{1}{2}a^2\sin x$

$\Delta OBC=\dfrac{1}{2}a^2\sin y$,

$\Delta OCA=\dfrac{1}{2}\sin(2\pi-(x+y))$

$\therefore \Delta ABC=\dfrac{a^2}{2}\{\sin x+\sin y-\sin(x+y)\}$

領域$D\,(0<x<2\pi, 0<y<2\pi, 0<x+y<2\pi)$において，関数

$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$

が最大値をとるならば，それは

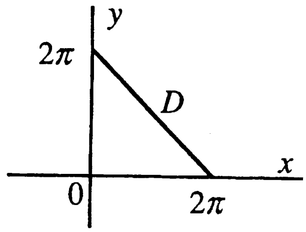
$f_x=\cos x-\cos(x+y)=0$，$f_y=\cos y-\cos(x+y)=0\cdots\cdots$①

からえられる。

$\therefore 2\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{2x+y}{2}=0$，$2\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x+2y}{2}=0$

$\therefore 2x+y=2\pi$，$x+2y=2\pi$

$\therefore x=y=\dfrac{2\pi}{3}\left(=2\pi-(x+y)\right)$



Dの周（$x=0$，$y=0\ or\ x+y=2\pi$）で

$f=0$

ここで，周を込めた閉領域$\overline{D}$で考えて，

定理「有界閉領域で連続な関数は最大値をとる」（Weierstrauss）より

ΔABCは$x=y=\dfrac{2\pi}{3}$つまり正三角形のとき面積が最大となる。

参考；Ｓ６２鹿児島（類題）

［１０５］Ｈ１大阪(工)

$g(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_2x_3$ に対し

（１）$g(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ となるような3×3型対称行列Fを求めよ。

（２）Fの固有値と単位固有ベクトル$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$を求めて，
$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$が直交行列になることを示せ。

（３）Fの標準形を求めよ。

解)

（１）$g=\begin{pmatrix}2x_1^2+0x_1x_2+0x_1x_3\\+0x_2x_1+x_2^2-3x_2x_3\\+0x_3x_1-3x_3x_2+x_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2x_1+0x_2+0x_3)x_1\\+(0x_1+x_2-3x_3)x_2\\+(0x_1-3x_2+x_3)x_3\end{pmatrix}$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2x_1+0x_2+0x_3\\0x_1+x_2-3x_3\\0x_1-3x_2+x_3\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-3\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad F=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-3\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

（２）$|tE-F|=\begin{vmatrix}t-2&0&0\\0&t-1&3\\0&3&t-1\end{vmatrix}=(t+2)(t-2)(t-4),$

固有値－２，２，４　　$(tE-F)\mathbf{v}=\mathbf{0}$

$t=2$のとき　　$t=4$のとき　　$t=-2$のとき

$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&3\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\quad y=z=0$　　$x=0,\ y+z=0$　　$x=0,\ y=z$

$\therefore\quad \mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　　$\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$　　$\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$P=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，容易に${}^tP\cdot P=E\ \therefore\quad P$；直交行列

（３）${}^tPFP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$