$I=\int_0^\infty \cos ax \exp(-x^2)dx$　を次のような手順で求めていく。

但し，$\int_0^\infty \exp(-x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　は用いてよい。

（１）$\cos ax$　を　$x=0$　でＴａｙｌｏｒ展開せよ。

（２）$J_n=\int_0^\infty x^{2n}\exp(-x^2)dx$　を求めよ。（J_nとJ_{n+1}の関係を導いて）

（３）$f_n(x)$を（１）で求めたものの$2n$次までのものとして

$\int_0^\infty f_n(x)\exp(-x^2)dx$　を求めよ。

（Ｔａｙｌｏｒ展開の剰余項または$\cos ax$と$f_n(x)$の大小関係を用いる。）

解）

（１）　$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}+R_{2n+1}$

で　$f(x)=\cos ax$　とおくと　$f^{(r)}(x)=a^r\cos\left(ax+\frac{r\pi}{2}\right)$　故

$$f^{(r)}(0)=a^r\cos\frac{r\pi}{2}=\begin{cases}0 & (r=2k-1)\\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}a^{2k} & (r=2k)\end{cases}$$

$$\therefore\quad \cos ax=1-\frac{a^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}a^{2k}x^{2k}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}a^{2n}x^{2n}+R_{2n+1}$$

但し，$R_{2n+1}=\frac{a^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(a\theta x+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$

（２）$J_n=\int_0^\infty x^{2n-1}x\exp(-x^2)dx=\int_0^\infty x^{2n-1}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)'dx$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^{2n-1}e^{-x^2}\right]_0^\infty+\frac{2n-1}{2}\int_0^\infty x^{2(n-1)}e^{-x^2}dx=\frac{2n-1}{2}J_{n-1}$$

$\because)$　$e^{x^2}=1+x^2+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots>\frac{x^{2n}}{n!}$　逆数をとって$(0<)x^{2n-1}$をかけて，$0<x^{2n-1}e^{-x^2}<n!\frac{1}{x}\xrightarrow{(x\to\infty)}0$　$\therefore\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}e^{-x^2}=0$

$J_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　だから順々に$J_1,J_2,\cdots$と求めて

$$J_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}$$

4月10日

[69] H5大阪（基礎工）　　その2

(3) $\cos ax = f_n(x) + R_{2n+1}$

$$\left|\int_0^\infty R_{2n+1}e^{-x^2}dx\right| \le \int_0^\infty |R_{2n+1}|e^{-x^2}dx \le \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$$

ここで，$K_n = \int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$　とおくと

$$K_0 = \int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$　(2) と同様に　$K_n = \frac{1}{2}\cdot n!$

$$\therefore \left|\int_0^\infty R_{2n+1}e^{-x^2}dx\right| \le \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{2}n! = \frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{n+1}\right)\left(\frac{a^2}{n+2}\right)\cdots\left(\frac{a^2}{2n+1}\right)$$

$$\le \frac{a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty R_{2n+1}e^{-x^2}dx = 0$$

ここで，$2a^2 - 1 < n$　を満たす　n　について考えると，

$$\frac{a^2}{n+k} < \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \cdots, n+1)$$

$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$　だから，

$$\int_0^\infty f_n(x)e^{-x^2}dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}\int_0^\infty x^{2k}e^{-x^2}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}J_k = \sum\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k)}(-1)^k a^{2k}\frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots(2\cdot k)}(-1)^k a^{2k}\frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^{2k}}{2^k\cdot k!}\frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{a^2}{4}\right)^k\frac{1}{k!} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{a^2}{4}\right)^k\frac{1}{k!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{a^2}{4}\right)$$

以上より，$\cos ax = f_n(x) + R_{2n+1}$

$$\therefore \int_0^\infty \cos ax\cdot\exp(-x^2)dx = \int_0^\infty f_n(x)e^{-x^2}dx + \int_0^\infty R_{2n+1}e^{-x^2}dx$$

$$\downarrow (n\to\infty)$$

$$I(a) = \int_0^\infty \cos ax\cdot\exp(-x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)e^{-x^2}dx + 0$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{a^2}{4}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$ に対して

（１）３次元のベクトル $\mathbf{v}(\neq\mathbf{0})$ とし，$A\mathbf{v}=t\mathbf{v}$ となるような t を求めよ。

（２）（１）の結果を用いて $A\mathbf{v}=t\mathbf{v}$ となるような $\mathbf{v}(\neq\mathbf{0})$ を求めよ。

（３）A の固有ベクトルを $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ とし $P=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ とするとき，$P^{-1}AP$ を求めよ。

（４）正則行列 B が相異なる３つの固有値をもつとき，任意の正則行列を Q とし，$Q^{-1}BQ$ が対角化出きることを示せ。

解）

（１）$$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&-2&-3\\0&t-2&-1\\0&0&t-3\end{vmatrix}=(t-1)(t-2)(t-3)\quad\therefore t=1,2,3$$

（２）$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad(tE-A)\mathbf{v}=\mathbf{0}\quad i.e.\begin{pmatrix}t-1&-2&-3\\0&t-2&-1\\0&0&t-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$t=1$ のとき，$y=z=0$　$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(x\neq0)$$

$t=2$ のとき，$x=2y,z=0$　$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad(y\neq0)$$

$t=3$ のとき，$x=\dfrac{5}{2}y,\quad z=y$　$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{y}{2}\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}\quad(y\neq0)$$

4月10日

（３）$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}$　$P=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$とおくと

$|P|=2$　　$\therefore$　P；正則行列

$AP=A(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=(A\mathbf{v}_1,A\mathbf{v}_2,A\mathbf{v}_3)=(\mathbf{v}_1,2\mathbf{v}_2,3\mathbf{v}_3)$

$=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

（４）$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；$B$の相異なる固有値，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$；それぞれの固有ベクトル

$B\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$　$(\mathbf{v}_i\neq\mathbf{0})$……①　　$\mathbf{u}_i=Q^{-1}\mathbf{v}_i$……②　とおくと

$\mathbf{u}_i\neq\mathbf{0}$　且つ　$Q^{-1}BQ\mathbf{u}_i=\lambda_i\mathbf{u}_i$

$\therefore$　$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；$Q^{-1}BQ$の固有値で，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$；それぞれの固有ベクトル

$P=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$とおくと　P；正則行列　で（３）と同様に

$Q^{-1}BQP=PD$　　$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$　　$P^{-1}Q^{-1}BQP=D$

参考；　一般に，$A;n\times n$　　$\lambda_1,\cdots,\lambda_r;A$の相異なる固有値

$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_r$；それぞれの固有ベクトル$\Rightarrow\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_r$；一次独立

[７１] Ｈ５大阪（基礎工）

（１）m個の文字Aとn個の文字Bがある。Bがとなりあわないような順列は何通りあるか。但し，$m>n$。

（２）m個の文字Aとn個の文字B，k個の文字Cがある。Bがとなりあわないような順列は何通りあるか。但し，$m+k>n$。

解）

（１）例．$m=3, n=2$の場合　①$BABAA$，②$BAABA$，③$BAAAB$
④$ABABA$，⑤$ABAAB$，⑥$AABAB$

これは　$(\ )A(\ )A(\ )A(\ )$　の４つの$(\ )$にBを入れる，つまり，４個から２個とる組み合わせの場合数${}_4C_2=6$個と考えられる。一般にm個のAを仕切りにBの入る$(\ )$は$m+1$の場所が考えられる。従って，${}_{m+1}C_n$通り。

（２）例．$m=2, k=1, n=2$の場合　①$(\ )[C](\ )[A](\ )[A](\ )$，
②$(\ )[A](\ )[C](\ )[A](\ )$，③$(\ )[A](\ )[A](\ )[C](\ )$

上の３通りに対して$(\ )$にBの入る入り方が各々６通り

$\therefore\ 3\times6=18$通り

一般に$(m+k)$個の仕切り$[\ ]$にA, Cの入る入り方は${}_{m+k}C_k$通り．

$(m+k+1)$個の$(\ )$にBの入る入り方が${}_{m+k+1}C_n$通り．従って，

${}_{m+k}C_k\times{}_{m+k+1}C_n$通り